TS1

Contrôle du samedi 25 janvier 2020
(4 heures)

Partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques à rédiger sur copie

(1 heure)

I. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 4°) 2 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère le polynôme $P(z)=\left(z^2-\mathrm{i}z\right)^n-\left(z-\mathrm{i}\right)^n$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1°) Quel est le degré de $P(z)$? On répondra sans justifier.

2°) Dans cette question, on prend $n=3$.
Développer et réduire $P(z)$.

3°) Calculer $P(2\mathrm{i})$ (résultat sous la forme la plus simple possible) puis déterminer les entiers naturels n tels que $P(2\mathrm{i})$ soit un réel.

4°) Démontrer que pour tout nombre complexe z on a $P(z)=\left(z-\mathrm{i}\right)^n\left(z^n-1\right)$.

5°) Dans cette question, on prend $n=4$.
Déterminer les racines de $P(z)$.

II. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{\sin x}-\dfrac{\cos(ax)}{\cos x}$ où a est un réel fixé.

1°) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?

2°) Démontrer que pour tout réel $x\in\mathscr{D}$ on a $f(x)=\dfrac{2\sin\big((a-1)x\big)}{\sin 2x}$.

3°) Dans cette question, on prend $a=3$. Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x\in\mathscr{D}$.

4°) Dans cette question, on prend $a=5$. Déterminer une expression simplifiée de $f(x)$ pour $x\in\mathscr{D}$.

III. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto 4x(1-x)$.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $f\left(\sin^2 x\right)=\sin^2 2x$.

2°) Démontrer que pour tout réel x on a $\left(f\circ f\right)\left(\sin^2 x\right)=\sin^2 4x$.

3°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Déterminer une expression simple de $\underbrace{\left(f\circ f\circ ...\circ f\right)}_{n \text{ fois}}\left(\sin^2 x\right)$ en fonction de x et de n.

Corrigé de la partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

I.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère le polynôme $P(z)=\left(z^2-\mathrm{i}z\right)^n-(z-\mathrm{i})^n$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1°) Quel est le degré de $P(z)$? On répondra sans justifier.

Le degré de $P(z)$ est $2n$.

2°) Dans cette question, on prend $n=3$.
Développer et réduire $P(z)$.

On doit développer $P(z)=\left(z^2-\mathrm{i}z\right)^3-(z-\mathrm{i})^3$.

On utilise l'identité cubique $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=\left(z^2-\mathrm{i}z\right)^3-(z-\mathrm{i})^3$$

$$=z^6-3z^4\times\mathrm{i}z+3z^2\times(\mathrm{i}z)^2-(\mathrm{i}z)^3-\left(z^3-3z^2\times\mathrm{i}+3z\times\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^3\right)$$

$$=z^6-3\mathrm{i}z^5-3z^4+\mathrm{i}z^3-\left(z^3-3\mathrm{i}z^2-3z+\mathrm{i}\right)$$

$$=z^6-3\mathrm{i}z^5-3z^4+(\mathrm{i}-1)z^3+3\mathrm{i}z^2+3z-\mathrm{i}$$

3°) Calculer $P(2\mathrm{i})$ (résultat sous la forme la plus simple possible) puis déterminer les entiers naturels n tels que $P(2\mathrm{i})$ soit un réel.

$$P(2\mathrm{i})=\left((2\mathrm{i})^2-\mathrm{i}\times 2\mathrm{i}\right)^n-(2\mathrm{i}-\mathrm{i})^n$$

$$=(-4+2)^n-\mathrm{i}^n$$

$$=(-2)^n-\mathrm{i}^n$$

On raisonne par disjonction de cas.

1er cas : n pair

Dans ce cas, on sait que i^n est un réel. Par conséquent, $P(2\mathrm{i})$ est un réel.

2e cas : n impair

Dans ce cas, on sait que i^n est un imaginaire pur. Par conséquent, $P(2\mathrm{i})$ n'est pas un réel.

On en déduit que les entiers naturels n tels que $P(2\mathrm{i})$ est un réel sont les entiers naturels pairs.

4°) Démontrer que pour tout nombre complexe z on a $P(z)=(z-\mathrm{i})^n\left(z^n-1\right)$.

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=\left(z^2-\mathrm{i}z\right)^n-(z-\mathrm{i})^n$$

$$=\left[z(z-\mathrm{i})\right]^n-(z-\mathrm{i})^n$$

$$=z^n(z-\mathrm{i})^n-(z-\mathrm{i})^n$$

$$=(z-\mathrm{i})^n\left(z^n-1\right)$$

5°) Dans cette question, on prend $n=4$.
Déterminer les racines de $P(z)$.

Les racines de $P(z)$ sont les solutions de l'équation $P(z)=0$.

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad P(z)=(z-\mathrm{i})^4\left(z^4-1\right)\quad\text{(factorisation obtenue à la question précédente pour } n=4\text{)}$$

$$=(z-\mathrm{i})^4\left(\left(z^2\right)^2-1^2\right)$$

$$=(z-\mathrm{i})^4\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)$$

$$=(z-\mathrm{i})^4(z-1)(z+1)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$$

$$=(z-\mathrm{i})^5(z-1)(z+1)(z+\mathrm{i})$$

Les racines de $P(z)$ sont donc 1, – 1, i, – i.

II.

On considère la fonction $f: x\mapsto\dfrac{\sin(ax)}{\sin x}-\dfrac{\cos(ax)}{\cos x}$ où a est un réel fixé.

1°) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $\sin x\neq 0$ et $\cos x\neq 0$

Les réels dont le sinus vaut 0 sont les réels de la forme $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Les réels dont le cosinus vaut 0 sont les réels la forme $\frac{\pi}{2}+\ 2k\pi$, k appartenant à $\mathbb{Z}$.

En utilisant le cercle trigonométrique, on s'aperçoit que les réels dont le cosinus ou le sinus est égal à 0 sont les réels de la forme $\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

On peut donc écrire $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2°) Démontrer que pour tout réel $x\in\mathscr{D}$ on a $f\left(x\right)=\frac{2\sin\left(\left(a-1\right)x\right)}{\sin 2x}$.

$$\forall x\in\mathscr{D}\quad f\left(x\right)=\frac{\sin\left(ax\right)\times\cos x-\cos\left(ax\right)\times\sin x}{\sin x\times\cos x}$$

$$=\frac{\sin\left(ax-x\right)}{\sin x\times\cos x}$$

$$=\frac{\sin\left(\left(a-1\right)x\right)}{\sin x\cos x}$$

$$=\frac{2\sin\left(\left(a-1\right)x\right)}{2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{2\sin\left(\left(a-1\right)x\right)}{\sin 2x}$$

3°) Dans cette question, on prend $a=3$. Déterminer une expression simplifiée de $f\left(x\right)$ pour $x\in\mathscr{D}$.

$$\forall x\in\mathscr{D}\quad f\left(x\right)=\frac{2\sin\left(\left(3-1\right)x\right)}{\sin 2x}$$

$$=\frac{2\sin 2x}{\sin 2x}$$

$$=2$$

4°) Dans cette question, on prend $a=5$. Déterminer une expression simplifiée de $f\left(x\right)$ pour $x\in\mathscr{D}$.

$$\forall x\in\mathscr{D}\quad f\left(x\right)=\frac{2\sin\left(\left(5-1\right)x\right)}{\sin 2x}$$

$$=\frac{2\sin 4x}{\sin 2x}$$

$$=\frac{2\times 2\cancel{\sin 2x}\cos 2x}{\cancel{\sin 2x}}$$

$$=4\cos 2x$$

III.

On considère la fonction $f:x\mapsto\ 4x\left(1-x\right)$.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a $f\left(\sin^2 x\right)=\sin^2 2x$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f\left(\sin^2 x\right)=4\sin^2 x\times\left(1-\sin^2 x\right)$$

$$=4\sin^2 x\times\cos^2 x$$

$$=\left(2\sin x\cos x\right)^2$$

$$=\left(\sin 2x\right)^2$$

2°) Démontrer que pour tout réel x on a $\left(f\circ f\right)\left(\sin^2 x\right)=\sin^2 4x$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\left(f\circ f\right)\left(\sin^2 x\right)=f\left[f\left(\sin^2 x\right)\right]$$

$$=f\left(\sin^2 2x\right)$$

$=\sin^2\left(2\times 2x\right)$ (on applique le résultat du 1°) en posant $y=2x$ ce qui évite de refaire des calculs)

$$=\sin^2\left(4x\right)$$

3°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Déterminer une expression simple de $\underbrace{\left(f\circ f\circ\ldots\circ f\right)}_{n\text{ fois}}\left(\sin^2 x\right)$ en fonction de x et de n.

De la même manière qu'aux questions 1°) et 2°), on obtient $\left(f\circ f\circ f\right)\left(\sin^2 x\right)=\sin^2 8x$, $\left(f\circ f\circ f\circ f\right)\left(\sin^2 x\right)=\sin^2 16x$.
On peut conjecturer que $\forall x\in\mathbb{R}\ \ \underbrace{\left(f\circ f\circ\ldots\circ f\right)}_{n\text{ fois}}\left(\sin^2 x\right)=\sin^2\left(2^n x\right)$.

Ce résultat se démontre aisément par récurrence.