**TS1**

# Contrôle du samedi 11 janvier 2020 (2 heures)

À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

**Numéro : …..**

**Prénom et nom :** ……………………………………………………

**Note : ….. / 20**

---

**I. (2 points)**

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, P)$.

On suppose que A et B vérifient les conditions suivantes :

A et B sont indépendants pour $P$ ; $P\left(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)=0,5$ ; $P\left(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\right)=0,9$.

On pose $x=P(\mathrm{A})$ et $y=P(\mathrm{B})$.

Écrire un système de deux équations vérifiées par $x$ et $y$.
En déduire $x$ et $y$.

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

**II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)**

À un concours, un QCM comporte 8 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse enlève un demi-point.
Un candidat décide de répondre au hasard à toutes les questions.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses du candidat.

Compléter la phrase :

X suit …………………………………………………………………………………………………………… .

1°) Calculer la probabilité d'obtenir 4 réponses exactes au QCM. On donnera la valeur arrondie au millième.

…………. (une seule réponse sans égalité)

2°) On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de points du candidat.

Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.
**Indication :** Exprimer Y en fonction de X.

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

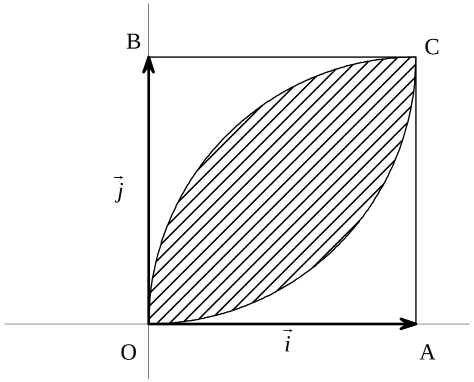
……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

**III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points ; 3°) 1 point)**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $\mathrm{A}(1\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;1)$ et $\mathrm{C}(1\,;1)$.
Le domaine hachuré $\mathscr{D}$ est l'intersection des disques fermés de centres A et B et de rayon 1. On admettra que l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $p=\dfrac{\pi}{2}-1$ (résultat que l'on peut obtenir facilement).




• On choisit un point $\mathrm{M}(x\,;y)$ en tirant au hasard de façon indépendante ses coordonnées $x$ et $y$ au hasard dans l'intervalle $I=[0\,;1]$ (c'est-à-dire selon la loi uniforme sur $I$). On admet que la probabilité que le point M appartienne à $\mathscr{D}$ est égale à $p$.
• On répète $n$ fois, $n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, l'expérience du choix d'un point M au hasard dans le carré OACB.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de points appartenant à $\mathscr{D}$ parmi les $n$ points obtenus.
La probabilité qui modélise le problème est notée $P$.

Compléter la phrase :

X suit ……………………………………………………………………………………………………………….. .

1°) On prend $n=100$. Calculer la probabilité pour qu'au moins la moitié des points appartiennent à $\mathscr{D}$.
On donnera la valeur arrondie au millième.

………………… (une seule réponse sans égalité)

2°) On prend $n=40$.

Déterminer :
- le plus petit entier naturel $a$ tel que $P(\mathrm{X}\leqslant a)>0{,}025$ ;
- le plus petit entier naturel $b$ tel que $P(\mathrm{X}\leqslant b)\geqslant 0{,}975$.

…………………… (écrire les valeurs de $a$ et $b$)

Pour ces valeurs de $a$ et $b$ ainsi trouvées, calculer $P(a\leqslant \mathrm{X}\leqslant b)$. On donnera la valeur arrondie au millième.

………………… (une seule réponse sans égalité)

3°) On souhaite réaliser une simulation informatique de la variable aléatoire X.
On admet que le domaine $\mathscr{D}$ est caractérisé par l'inéquation $x^2+y^2\leqslant 2\min(x\,;y)$.
Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche en sortie le nombre de points qui appartiennent à $\mathscr{D}$.

**Entrée :**
Saisir *n*

**Initialisation :**
*a* prend la valeur 0

**Traitement :**
**Pour** *i* allant de 1 à *n* **Faire**
$\quad$ *x* et *y* prennent des valeurs aléatoires comprises entre 0 et 1
$\quad$ **Si** $x^2+y^2\leqslant 2\min(x\,;y)$
$\quad\quad$ **Alors** *a* prend la valeur …………
$\quad$ **FinSi**
**FinPour**

**Sortie :**
Afficher ……

---

**IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)**

1°) On note $\alpha$ le réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ tel que $\sin\alpha=0{,}7$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\alpha$.

…………………… (une seule réponse sans égalité)

2°) Soit $\beta$ le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\beta=-\dfrac{3}{4}$.
Calculer la valeur exacte de $\cos\dfrac{\beta}{2}$ en justifiant.

……………….……………………………………………………………………………………………

……………….……………………………………………………………………………………………

……………….……………………………………………………………………………………………

……………….……………………………………………………………………………………………

……………….……………………………………………………………………………………………

**Numéro : …..** **Prénom et nom :** …………………..……………………………….

---

### V. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x-4}}$.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

Compléter la phrase :

L'étude de la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée du type « ……….. ».

Démontrer que pour tout réel $x > 4$, on a $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{x-4}}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-4}$ en justifiant et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

### VI. (2 points)

Rappeler la limite de référence suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \ldots\ldots$ .

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de $f$ en 0.

Compléter la phrase :

L'étude de la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 fait apparaître une forme indéterminée du type « ……….. ».

Démontrer que pour tout réel $x$ qui n'est pas de la forme $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $1-\cos x = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$.

En déduire la limite de $f$ en 0.

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

………………..………………………………………………………………………………………

**VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)**

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$.

On admettra que l'ensemble de définition de $f$ est $\mathscr{D} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[2k\pi \,;\, (2k+1)\pi\right]$ et que l'ensemble de dérivabilité de $f$ est $\mathscr{D}' = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left]2k\pi \,;\, (2k+1)\pi\right[$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}'$.

………………..…………………………………………

2°) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5\pi}{6}$.

…………..…………… (une seule réponse sans égalité)

---

**VIII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)**

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1°) On pose $z = 1 + \mathrm{i} + m(1 - \mathrm{i})$ où $m$ est un réel.

Calculer $|z|$ en fonction de $m$.

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

2°) Soit $z$ un nombre complexe de module 1.

Démontrer que $|z^2 - z| = |z - 1|$ sans utiliser la forme algébrique de $z$.

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

………………..……………………………………………………………………………………………

# Corrigé du contrôle du 11-1-2019

**Contrôle commun**

**I.**

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, P)$.
On suppose que A et B vérifient les conditions suivantes :
A et B sont indépendants pour $P$ ; $P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) = 0{,}5$ ; $P\left(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\right) = 0{,}9$.

On pose $x = P(\mathrm{A})$ et $y = P(\mathrm{B})$.
Écrire un système de deux équations vérifiées par *x* et *y*.
En déduire *x* et *y*.

On utilise la définition de deux événements indépendants : $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$.

On utilise également la propriété :

> Si deux événements A et B sont indépendants, alors :
> ① $\overline{\mathrm{A}}$ et B sont indépendants ;
> ② A et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants ;
> ③ $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{B}}$ sont indépendants.

On utilise enfin la propriété $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$ valable quels que soient les événements A et B.

Les égalités $P\left(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}\right) = 0{,}5$ et $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}9$ permettent d'écrire $\begin{cases} x(1-y) = 0{,}5 & (1) \\ x + y - xy = 0{,}9 & (2) \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow x - xy = 0{,}5 \quad (1')$

L'égalité $(1')$ permet de remplacer $x - xy$ par 0,5 dans $(2)$.
On obtient $0{,}5 + y = 0{,}9$ ce qui donne immédiatement $y = 0{,}4$.

On reprend alors $(1)$ en remplaçant *y* par 0,4.

On obtient $x(1 - 0{,}4) = 0{,}5$ qui donne immédiatement $0{,}6x = 0{,}5$ d'où $x = \dfrac{0{,}5}{0{,}6} = \dfrac{5}{6}$.

Variante (maladroite donc à éviter) :

On reprend alors $(1')$ en remplaçant *y* par 0,4.

On obtient $x - 0{,}4x = 0{,}5$ qui donne immédiatement $x = \dfrac{0{,}5}{0{,}6} = \dfrac{5}{6}$.

**II.**

À un concours, un QCM comporte 8 questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse enlève un demi-point.
Un candidat décide de répondre au hasard à toutes les questions.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses du candidat.

Compléter la phrase :

X suit la loi binomiale de paramètres 8 (nombre d'épreuves) et $\dfrac{1}{4}$ (probabilité d'un succès).

1°) Calculer la probabilité d'obtenir 4 réponses exactes au QCM. On donnera la valeur arrondie au millième.

0,087 (une seule réponse sans égalité)

On cherche $P(\mathrm{X} = 4)$.
Avec la calculatrice, on trouve $P(\mathrm{X} = 4) = 0{,}08651733...$.

2°) On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de points du candidat.

Calculer l'espérance et l'écart-type de Y.
**Indication :** Exprimer Y en fonction de X.

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X} \times 1 + (8 - \mathrm{X}) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

nombre de réponses justes            nombre de réponses fausses

$$\mathrm{Y} = \frac{3}{2}\mathrm{X} - 4$$

On applique les formules $\mathrm{E}(a\mathrm{X} + b) = a\mathrm{E}(\mathrm{X}) + b$ et $\sigma(a\mathrm{X} + b) = |\,a\,|\sigma(\mathrm{X})$.

On a donc $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \dfrac{3}{2}\mathrm{E}(\mathrm{X}) - 4$.

Or $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 8 \times \dfrac{1}{4} = 2$ (formule de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale).

Donc $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \dfrac{3}{2} \times 2 - 4 = -1$.

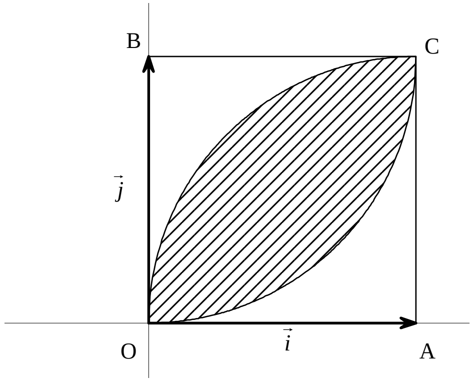
On a $\sigma(\mathrm{Y}) = \dfrac{3}{2}\sigma(\mathrm{X})$.

Or $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{8 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ (formule de la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale)

On a donc $\sigma(\mathrm{Y}) = \dfrac{3}{2} \times \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

**III.**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points $A(1\,;0)$, $B(0\,;1)$ et $C(1\,;1)$.
Le domaine hachuré $\mathscr{D}$ est l'intersection des disques fermés de centres A et B et de rayon 1. On admettra que l'aire de $\mathscr{D}$ est égale à $p=\dfrac{\pi}{2}-1$ (résultat que l'on peut obtenir facilement).




• On choisit un point $M(x\,;y)$ en tirant au hasard de façon indépendante ses coordonnées $x$ et $y$ au hasard dans l'intervalle $I=[0\,;1]$ (c'est-à-dire selon la loi uniforme sur $I$). On admet que la probabilité que le point M appartienne à $\mathscr{D}$ est égale à $p$.
• On répète $n$ fois, $n$ étant un entier naturel supérieur ou égal à 1, l'expérience du choix d'un point M au hasard dans le carré OACB.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de points appartenant à $\mathscr{D}$ parmi les $n$ points obtenus.
La probabilité qui modélise le problème est notée $P$.

Compléter la phrase :

X suit la loi binomiale de paramètres $n$ (nombre d'épreuves) et $p=\dfrac{\pi}{2}-1$ (probabilité d'un succès).

1°) On prend $n=100$. Calculer la probabilité pour qu'au moins la moitié des points appartiennent à $\mathscr{D}$.
On donnera la valeur arrondie au millième.

0,937 (une seule réponse sans égalité)

On suppose que $n=100$ et on cherche $P(X \geqslant 50)$.

1ère méthode : Utilisation de la commande binomFRép

Afin d'utiliser la calculatrice, on écrit $P(X \geqslant 50)=1-P(X \leqslant 49)$.

On trouve $P(X \geqslant 50)=0,93658744...$.

La valeur arrondie au millième de la probabilité qu'au moins la moitié des points appartiennent à $\mathscr{D}$ est 0,937.

2e méthode : Utilisation de la commande de calcul d'une somme sur la calculatrice

On écrit $P(X \geqslant 50)=\displaystyle\sum_{k=50}^{k=100} P(X=k)$.

2°) On prend $n=40$.

Déterminer :
- le plus petit entier naturel $a$ tel que $P(X \leqslant a)>0,025$ ;
- le plus petit entier naturel $b$ tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

17 ; 29 (écrire les valeurs de $a$ et $b$)

Pour ces valeurs de $a$ et $b$ ainsi trouvées, calculer $P(a \leqslant X \leqslant b)$. On donnera la valeur arrondie au millième.

0,963 (une seule réponse sans égalité)

On écrit $P(17 \leqslant X \leqslant 29)=P(X \leqslant 29)-P(X \leqslant 16)$.
On obtient un résultat proche de 0,95 ce qui était prévisible puisque les valeurs de $a$ et $b$ correspondent à la recherche d'un intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 0,95.

3°) On souhaite réaliser une simulation informatique de la variable aléatoire X.
On admet que le domaine $\mathscr{D}$ est caractérisé par l'inéquation $x^2+y^2 \leqslant 2\min(x\,;y)$.
Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche en sortie le nombre de points qui appartiennent à $\mathscr{D}$.

**Entrée :**
Saisir $n$

**Initialisation :**
$a$ prend la valeur 0

**Traitement :**
**Pour** $i$ allant de 1 à $n$ **Faire**
 $x$ et $y$ prennent des valeurs aléatoires comprises entre 0 et 1
 **Si** $x^2+y^2 \leqslant 2\min(x\,;y)$
  **Alors** $a$ prend la valeur $a+1$
 **FinSi**
**FinPour**

**Sortie :**
Afficher $a$

**IV.**

1°) On note $\alpha$ le réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ tel que $\sin\alpha = 0,7$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\alpha$.

2,366 (une seule réponse sans égalité)

Pour tout réel $y \in [-1\,;1]$, l'Arcsinus de $y$ est l'unique réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = y$

Il faut faire un cercle trigonométrique : le réel que l'on cherche n'est pas dans le bon intervalle de l'Arcsinus.

On a $\alpha = \pi - \text{Arcsin}(0,7)$.

Grâce à la calculatrice, en tapant $\pi - \sin^{-1}(0.7$, on obtient $\alpha = 2,36619515...$.

2°) Soit $\beta$ le réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $\cos\beta = -\frac{3}{4}$.

Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\beta}{2}$ en justifiant.

Pour commencer, on peut noter que, par définition, $\beta = \text{Arccos}\left(-\frac{3}{4}\right)$. Nous n'utiliserons cependant pas ce résultat pour répondre à la question.

On utilise l'astuce de départ : $\beta = 2\times\frac{\beta}{2}$.

$\cos\beta = \cos\left(2\times\frac{\beta}{2}\right)$

Formule de duplication $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$-\frac{3}{4} = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1$

On a donc $2\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{4}$ d'où $\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{8}$.

Donc $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ou $\cos\frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Or $\frac{\beta}{2} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\frac{\beta}{2} \geqslant 0$.

On en déduit que $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Variante :

On applique directement la formule de linéarisation (voir plus loin) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ que l'on peut aussi écrire sous la forme $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ en prenant $x = \frac{\beta}{2}$.

On obtient ainsi $2\cos^2\frac{\beta}{2} = 1 - \frac{3}{4}$ d'où $\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{8}$.

On finit comme précédemment.

Une mauvaise méthode consiste à déterminer grâce à la calculatrice une valeur approchée de $\beta$ puis à utiliser cette valeur de $\beta$ pour calculer $\cos\frac{\beta}{2}$, toujours à l'aide de la calculatrice. En effet, cette méthode permet de trouver une valeur approchée et non la valeur exacte qui est demandée.

---

**V.**

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x-4}}$.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

Compléter la phrase :

L'étude de la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Démontrer que pour tout réel $x > 4$, on a $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x-4}}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-4}$ en justifiant et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\forall x \in \left]4\,;+\infty\right[ \qquad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-4}}$.

$= \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x-4}}$ (puisque $x > 4$ entraîne $x$ positif ou nul)

$= \sqrt{\frac{x^2}{x-4}}$.

La fonction $x \mapsto \frac{x^2}{x-4}$ est une fonction rationnelle non nulle donc on peut appliquer la règles du quotient simplifié des monômes de plus haut degré.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\underbrace{x-4}_{X}} = 1 \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

On contrôle ce résultat graphiquement en traçant la courbe représentative de $f$ sur l'écran de la calculatrice.

## VI.

Rappeler la limite de référence suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ .

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Le but de l'exercice est de déterminer la limite de $f$ en 0.

Compléter la phrase :

L'étude de la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 0 fait apparaître une forme indéterminée du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

Démontrer que pour tout réel $x$ qui n'est pas de la forme $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on a $1-\cos x = \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$.
En déduire la limite de $f$ en 0.

Pour tout réel $x$ n'est pas de la forme $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on peut écrire :

$$1-\cos x = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$$

On peut écrire $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \times \dfrac{1}{1+\cos x}$.

On a $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ (en utilisant $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$) et $\dfrac{1}{1+\cos x} \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{2}$ donc par limite d'un produit $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \dfrac{1}{2}$.

On contrôle ce résultat graphiquement en traçant la courbe représentative de $f$ sur l'écran de la calculatrice.

---

## VII.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$ .

On admettra que l'ensemble de définition de $f$ est $\mathscr{D} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi\,;(2k+1)\pi]$ et que l'ensemble de dérivabilité de $f$ est $\mathscr{D}' = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} ]2k\pi\,;(2k+1)\pi[$ .

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathscr{D}'$.

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

On applique la formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

2°) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5\pi}{6}$.

$f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (une seule réponse sans égalité)

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\cos\frac{5\pi}{6}}{2\sqrt{\sin\frac{5\pi}{6}}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\sqrt{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$$

---

## VIII.

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1°) On pose $z = 1+\mathrm{i}+m(1-\mathrm{i})$ où $m$ est un réel.
Calculer $|\,z\,|$ en fonction de $m$.

La forme algébrique de $z$ s'écrit : $z = 1+m+\mathrm{i}(1-m)$.

$$|\,z\,| = \sqrt{(1-m)^2+(1+m)^2} = \sqrt{2+2m^2}$$

2°) Soit $z$ un nombre complexe de module 1.
Démontrer que $|\,z^2-z\,| = |\,z-1\,|$ sans utiliser la forme algébrique de $z$.

$$|\,z^2-z\,| = |\,z(z-1)\,|$$

$$= |\,z\,|\times|\,z-1\,|$$

$$= 1\times|\,z-1\,|$$

$$= |\,z-1\,|$$