À la conquête des nombres

Au commencement

On pense que la pratique de l'élevage et de l'agriculture conduisit les hommes à dénombrer des troupeaux et à élaborer des calendriers. Ils ont ainsi manipulé des nombres entiers positifs que les mathématiciens nomment nombres entiers naturels. Pour écrire ces nombres, les diverses civilisations ont imaginé des systèmes de numérations très variés.

Problèmes de partages et nombres rationnels

Avec les problèmes de partage sont apparues des fractions simples comme $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc.

Rappelons que, pour un mathématicien, une fraction doit avoir son numérateur et son dénominateur entiers. Les Égyptiens savaient additionner des quantièmes (fractions de numérateur 1). Puis les Grecs ont effectué les quatre opérations sur des « rapports de grandeurs », comme le montre le *Livre V* des *Éléments* d'Euclide, écrits au III^{e} siècle avant J.-C. En particulier, les Grecs savaient calculer avec les nombres écrits sous forme fractionnaire et qu'on nomme nombres rationnels.

Racines carrées et nombres irrationnels

Les Grecs ont découvert avec étonnement que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Ils l'ont qualifié d'irrationnels ou de non énonçable, ce qui traduit bien leur embarras. Mais vers l'an 1000, les mathématiciens arabes et persans n'ont pas hésité à considérer tous les rapports de longueurs comme des nombres. Depuis ce temps-là, on admet qu'à côté des nombres rationnels, il en existe d'autres – les irrationnels – qui n'ont pas d'écriture fractionnaire. L'un des plus célèbres est le nombre π. Mais c'est seulement en 1761 que le français Lambert démontra l'irrationalité de π.

Irruption du zéro et des nombres négatifs

Au VII^{e} siècle après J.-C., le mathématicien BRAHMAGUPTA énonça des règles pour opérés sur trois sortes de nombres appelés « biens », « dettes » et « zéro ». On avait ainsi inventé les nombres relatifs. Grâce à eux la soustraction est toujours possible. Par exemple, $3-7=-4$. Cependant les mathématiciens furent longtemps réticents avant d'accepter les nombres négatifs. Au XVII^{e} siècle, Descartes qualifiait encore de « fausses » ou moindres que rien les solutions négatives d'une équation.

Pour faciliter les calculs, apparition des décimaux

Le fait d'écrire les nombres entiers avec un chiffre pour les unités, un chiffre pour les dizaines, un chiffre pour les centaines, etc. facilite beaucoup les opérations (essayez de faire une multiplication avec des chiffres romains). Au fil du temps, les mathématiciens ont remarqué sur des nombres non entiers que les calculs seraient également facilités si l'on avait un chiffre pour les dixièmes, un chiffre pour les centièmes, etc.
En 1582, le flamand STEVIN publia un traité complet sur l'usage des nombres décimaux. Ceux-ci ne sont que des nombres rationnels particuliers (car tout décimal s'écrit sous forme de fraction ; par exemple : $1{,}998=\frac{1998}{1000}$). Mais ils ont un grand intérêt pratique car ils fournissent des valeurs approchées pour les autres nombres, rationnels ou irrationnels : par exemple, on remplace souvent π par 3,14.

La grande famille des nombres réels

Les nombres relatifs évoqués ci-dessus, rationnels et irrationnels, constituent l'ensemble des nombres réels. Lorsqu'on gradue une droite, tout point a pour abscisse un nombre réel, et tout nombre réel est l'abscisse d'un point. C'est pourquoi on peut représenter les nombres réels par les points d'une droite graduée.

Synthèse :

Les mathématiciens ont d'abord admis l'existence des nombres naturels pour dénombrer des biens ou élaborer des calendriers. Ils ont ainsi manipulé des entiers strictement positifs en faisant différentes opérations.
Ils ont cependant remarqué que certaines soustractions forment des nombres négatifs (cf. exemple). Ils ont alors introduit les nombres relatifs qui comprend les entiers naturel mais aussi les entiers négatifs les soustractions sont ainsi toutes possibles.

Avec les problèmes de partages les mathématiciens ont créé les fractions, ils ont remarqué que $\frac{1}{3}$ et $\frac{-5}{-7}$ ne sont pas entiers naturels. Ils ont alors on introduit les nombres rationnels qui comprennent les entiers relatifs avec lesquels les divisions sont toujours possibles à part par 0.

Puis les mathématiciens n'ayant pas su trouver exactement le nombre π ou $\sqrt{2}$ qui sont des irrationnels, on admit la famille des réels qui comprennent les rationnels et les irrationnels.