$1^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 6 décembre 2019 (50 minutes)

À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (2 points)

On considère un rectangle dont l'aire est égale 3 cm^2. On note x l'une des dimensions en cm.
Exprimer le périmètre $\mathcal{P}$ exprimé en cm du rectangle en fonction de x. On attend quelques explications succinctes.

………

………

………

………

………

II. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2+1}=3 \quad (1)$.

………

………

………

………

………

………

………

III. (3 points)

On note $\mathcal{C}_m$ la parabole d'équation $y=mx^2+(2m-1)x+m$ où m est un réel non nul dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer les coordonnées de son sommet S_m en fonction de m.

Démontrer que tous les points S_m sont situés sur une droite fixe L dont on donnera une équation.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (5 points : 1 point par calcul)

On effectuera les calculs au brouillon. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x)=\sqrt{1-2x}$ $\quad f'(x)=$

2°) $f(x)=1-2(3x-1)^5$ $\quad f'(x)=$

3°) $f(x)=\dfrac{4}{(3x-2)^8}$ $\quad f'(x)=$

4°) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+1}$ $\quad f'(x)=$

5°) $f(x)=\dfrac{1}{2\left(x^2+1\right)}$ $\quad f'(x)=$

V. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x-\dfrac{x^3}{3}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

À quelle famille de fonctions *f* appartient-elle ?

………

1°) Compléter l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f'(x)=$…………………………..

2°) Compléter sans explications la phrase :

f' s'annule en …………………………………………… [écrire la (ou les) valeur(s) de *x*, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de *f* ; écrire les extremums.

3°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-\dfrac{1}{3}$.

………… (un seul résultat sans égalité)

4°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2.

……………………

VI. (3 points)

Dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2+y^2=10$ et *D* la droite d'équation $x+y=1$.

Tracer $\mathcal{C}$ et *D* sur le graphique donné en annexe.

Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D* en rédigeant convenablement.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

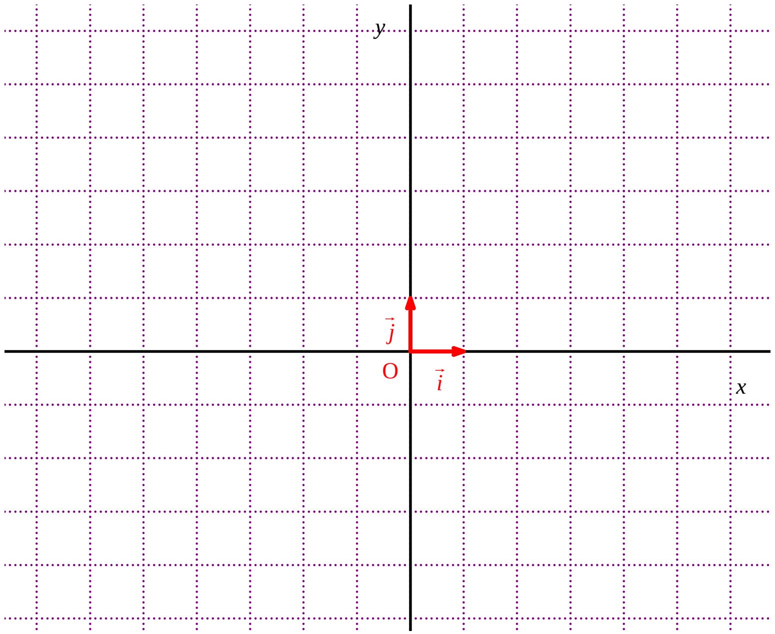
………

………

Annexe exercice VI.

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………….



Corrigé du contrôle du 6-12-2019

I.

On considère un rectangle dont l'aire est égale 3 cm^2. On note x l'une des dimensions en cm.
Exprimer le périmètre $\mathcal{P}$ exprimé en cm du rectangle en fonction de x. On attend quelques explications succinctes.

Soit y l'autre dimension du rectangle en cm.

On sait que l'aire du rectangle est égale 3 cm^2 donc $x \times y = 3$ d'où $y = \dfrac{3}{x}$ (car x est une longueur non nulle).

$\mathcal{P} = 2x + 2y$

$= 2x + \dfrac{6}{x}$

II.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2+1} = 3 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$x^2 + 1 = 9$

$x^2 = 8$

$x = \sqrt{8}$ ou $x = -\sqrt{8}$

[$x = 2\sqrt{2}$ ou $x = -2\sqrt{2}$] ligne facultative

Soit S l'ensemble de solutions de (1).

$S = \left\{2\sqrt{2}\,;\,-2\sqrt{2}\right\}$

III.

On note $\mathcal{C}_m$ la parabole d'équation $y = mx^2 + (2m-1)x + m$ où m est un réel non nul dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Déterminer les coordonnées de son sommet S_m en fonction de m.
Démontrer que tous les points S_m sont situés sur une droite fixe L dont on donnera une équation.

On remarque que $mx^2 + (2m-1)x + m$ est une expression de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = m$, $b = 2m-1$, $c = m$.
Il s'agit bien d'un polynôme du second degré puisque m est non nul par hypothèse.

On sait que le sommet d'une parabole $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c étant trois réels tels que a soit non nul) a pour coordonnées $\left(-\dfrac{b}{2a}\,;\,-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

On applique le résultat directement.

$x_{\text{S}_m} = -\dfrac{2m-1}{2m}$

$= \dfrac{1-2m}{2m}$

On calcule $\Delta = (2m-1)^2 - 4m^2 = 1 - 4m$.

$y_{\text{S}_m} = -\dfrac{\Delta}{4m}$

$= \dfrac{4m-1}{4m}$

On a $\begin{cases} x_{\text{S}_m} = \dfrac{1}{2m} - 1 \\ y_{\text{S}_m} = 1 - \dfrac{1}{4m} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 2x_{\text{S}_m} = \dfrac{1}{m} - 2 \\ 4y_{\text{S}_m} = 4 - \dfrac{1}{m} \end{cases}$.

Par addition membre à membre, on obtient $2x_{\text{S}_m} + 4y_{\text{S}_m} = 2$ soit $x_{\text{S}_m} + 2y_{\text{S}_m} = 1$.

Cette dernière égalité permet d'affirmer que les points S_m sont situés sur la droite L d'équation $x + 2y = 1$.

IV.

On effectuera les calculs au brouillon. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x) = \sqrt{1-2x}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{1-2x}}$ qu'on simplifie en $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$.

On applique la formule $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

2°) $f(x)=1-2(3x-1)^5$

On observe que $f=U+V$ avec $U(x)=1$ et $V(x)=-2(3x-1)^5$.

$f'(x)=0-2\times5\times3\times(3x-1)^4$ (utilisation de la formule $(u^n)'=-nu'u^{n-1}$)

$f'(x)=-30(3x-1)^4$

3°) $f(x)=\dfrac{4}{(3x-2)^8}$

On effectue la réécriture $f(x)=4\times\dfrac{1}{(3x-2)^8}$.

$f'(x)=4\times\left[-\dfrac{8\times3}{(3x-1)^9}\right]$ (utilisation de la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$)

$=-\dfrac{96}{(3x-1)^9}$

4°) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+1}$ $f'(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$

5°) $f(x)=\dfrac{1}{2(x^2+1)}$

On effectue la réécriture $f(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x^2+1}$.

$f'(x)=\dfrac{1}{\cancel{2}}\times\left[-\dfrac{\cancel{2}x}{(x^2+1)^2}\right]$ (utilisation de la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$)

$=-\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2x-\dfrac{x^3}{3}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

À quelle famille de fonctions *f* appartient-elle ?

f appartient à la famille des fonctions polynômes.

1°) Compléter l'égalité suivante : $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=2-x^2$.

On effectue la réécriture $f(x)=2-\dfrac{1}{3}x^3$ qui permet d'écrire directement la dérivée $f'(x)=2-\dfrac{1}{3}\times3x^2=2-x^2$.

2°) Compléter sans explication la phrase :

f' s'annule en $\sqrt{2}$ et en $-\sqrt{2}$ [écrire la (ou les) valeur(s) de *x*, sans égalités].

Dans un même tableau, étudier le signe de $f'(x)$ et les variations de *f* ; écrire les extremums.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		$\searrow$	$-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	$\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	

On vérifie le résultat en traçant la représentation graphique grâce à la calculatrice.

On calcule les extremums locaux.

$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}-\dfrac{(\sqrt{2})^3}{3}=2\sqrt{2}-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (maximum local)

$f(-\sqrt{2})=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (minimum local)

3°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $-\dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{17}{9}$ (un seul résultat sans égalité)

On calcule $f'\left(-\dfrac{1}{3}\right)=2-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=2-\dfrac{1}{9}=\dfrac{17}{9}$.

4°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente a pour coefficient directeur – 2.

2 ; – 2

Les abscisses des points cherchés sont les solutions de l'équation $f'(x) = -2$ soit $2 - x^2 = -2$ (1).

(1) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$x^2 = 4$

$x = 2$ ou $x = -2$

VI.

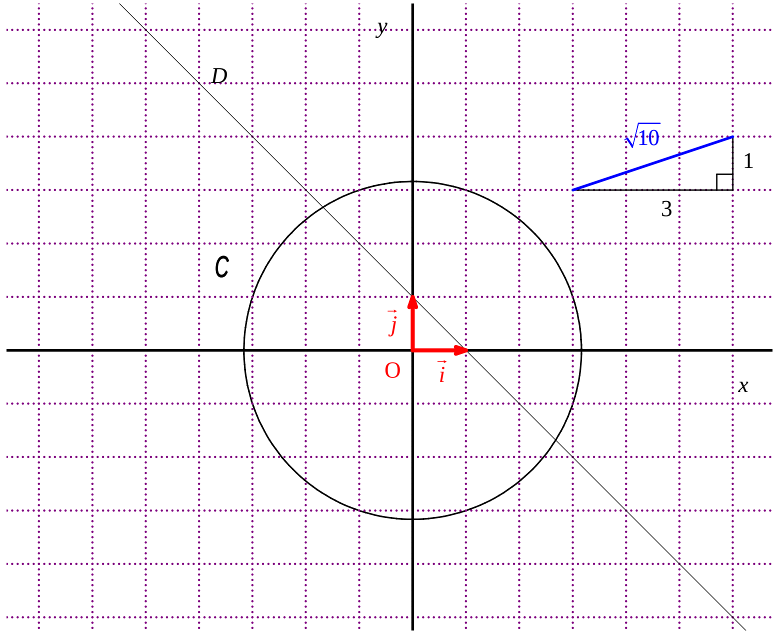
Dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 10$ et *D* la droite d'équation $x + y = 1$.
Tracer $\mathcal{C}$ et *D* sur le graphique donné en annexe.
Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D* en rédigeant convenablement.

On reconnaît une équation de la forme $x^2 + y^2 = R^2$. D'après le cours, $\mathcal{C}$ est donc le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon $\sqrt{10}$.

Pour le tracé, on observe que $10 = 3^2 + 1^2$. On construit donc un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs 3 et 1.
L'hypoténuse a donc pour longueur $\sqrt{10}$ que l'on peut reporter au compas.

Une autre méthode de consiste à observer que le cercle $\mathcal{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(3\,;1)$ puisque ses coordonnées vérifient son équation.

Pour le tracé de *D*, on observe que *D* passe par les points de coordonnées $(1\,;0)$ et $(0\,;1)$.
On peut aussi passer par l'équation réduite.



D a pour équation réduite $y = 1 - x$. On va remplacer *y* par $1 - x$ dans l'équation du cercle (méthode par substitution).

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D* sont les solutions de l'équation $x^2 + (1 - x)^2 = 10$ (1).

On résout ensuite (1) en développant d'abord le premier membre.

(1) est successivement équivalente aux lignes suivantes :

$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 10$

$2x^2 - 2x - 9 = 0$

Considérons le polynôme $2x^2 - 2x - 9$.

C'est un polynôme du second degré dont le discriminant réduit est égal à 19.

(1) admet donc deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{19}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{19}}{2}$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D* sont $\dfrac{1+\sqrt{19}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{19}}{2}$.