TS1

Contrôle du mercredi 4 décembre 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (2 points)

Soit (u_n) une suite qui converge vers 2. Pour le(s)quel(s) des intervalles suivants, peut-on affirmer qu'il existe un indice à partir duquel tous les termes de la suite lui appartiennent ?

a. $]0\,;+\infty[$	b. $]-\infty\,;0[$	c. $]-1\,;1[$	d. $]-1{,}999\,;2{,}001[$

II. (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - 2\times 3^{n+1}$ et $v_n = 1 - \dfrac{4^n}{3^{2n}}$ pour tout entier naturel *n*.

Déterminer en justifiant soigneusement les limites des deux suites.

III. (4 points)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leqslant (n+1)^2 u_n \leqslant n^2 + n$.

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

IV. (1 point)

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

On considère la fonction Python ci-contre qui, pour tout réel *x*, renvoie le plus petit entier naturel *n* tel que $u_n \geqslant x$.

```
def indice_dépassement(x) :
    u = 3
    n = 0
    while u < x :
        u = 2*u
        n = n+1
    return n
```

Que renvoie indice_dépassement(100) ?

………… (une seule réponse, sans égalité)

V. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel strictement supérieur à 1 fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel n.

1°) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$ (résultat que l'on peut aisément démontrer par récurrence).
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) À l'aide de la calculatrice conjecturer la limite de la suite (u_n). Faire une phrase sans justifier.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$ (et donc par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)! = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1)! = +\infty$).

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n+1)! - n!$ pour tout entier naturel n.

L'étude de la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée du type « …………… ».

Démontrer que $u_n = n \times n!$ pour tout entier naturel n. En déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n}{n!}$ pour tout entier naturel n.

L'étude de la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée du type « …………… ».

En effectuant une transformation de v_n, déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VII. (1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ pour tout entier naturel n.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a. (u_n) est bornée.	b. (u_n) est monotone.	c. (u_n) est convergente.

Le point de cet exercice ne sera accordé que si les trois réponses sont correctes.

Corrigé du contrôle du 4-12-2019

I.

Soit (u_n) une suite qui converge vers 2. Pour le(s)quel(s) des intervalles suivants, peut-on affirmer qu'il existe un indice à partir duquel tous les termes de la suite lui appartiennent ?

a. $]0\,;+\infty[$	b. $]-\infty\,;0[$	c. $]-1\,;1[$	d. $]-1{,}999\,;2{,}001[$

On sélectionne les deux intervalles ouverts qui contiennent 2 (cf. définition d'une suite qui converge vers 2).

II.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3^n - 2\times 3^{n+1}$ et $v_n = 1 - \dfrac{4^n}{3^{2n}}$ pour tout entier naturel n.

Déterminer en justifiant soigneusement les limites des deux suites.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = 3^n - 2\times 3^n \times 3$

$= 3^n - 6\times 3^n$

$= -5\times 3^n$

$3>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n = 1 - \dfrac{4^n}{\left(3^2\right)^n}$

$= 1 - \dfrac{4^n}{9^n}$

$= 1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$

$-1 < \dfrac{4}{9} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{4}{9}\right)^n = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

III.

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ qui vérifie, pour tout entier naturel n, $n^2 \leqslant (n+1)^2 u_n \leqslant n^2 + n$.

Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

En divisant chaque membre de l'encadrement par $(n+1)^2$ qui est strictement positif, on obtient les encadrements successifs suivants :

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2+n}{(n+1)^2}$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leqslant u_n \leqslant \frac{n(n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n+1}$$

On cherche les limites des suites qui encadrent u_n.

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Par conséquent, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 = 1^2 = 1$.

Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

IV.

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.
On considère la fonction Python ci-contre qui, pour tout réel x, renvoie le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant x$.

```
def indice_dépassement(x) :
      u = 3
      n = 0
      while  u < x  :
            u = 2*u
            n = n+1
      return n
```

Que renvoie indice_dépassement(100) ?

6 (une seule réponse, sans égalité)

u	3	6	12	24	48	96	192
n	0	1	2	3	4	5	6
u < 100 ?	V	V	V	V	V	V	F

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel strictement supérieur à 1 fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n - \dfrac{1}{u_n}$ pour tout entier naturel n.

1°) On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$ (résultat que l'on peut aisément démontrer par récurrence).
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

On étudie le signe de la différence entre deux termes consécutifs (méthode standard).

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = 2u_n - \frac{1}{u_n} - u_n$$

$$= u_n - \frac{1}{u_n}$$

$$= \frac{(u_n)^2 - 1}{u_n}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n)^2 > 1$ et par conséquent, $(u_n)^2 > 1$.

De plus, comme tous les termes de la suite (u_n) sont strictement supérieurs à 1, on en déduit qu'ils sont aussi strictement positifs.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ et par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

2°) À l'aide de la calculatrice conjecturer la limite de la suite (u_n). Faire une phrase sans justifier.

À l'aide de la calculatrice, on peut conjecturer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

VI.

On rappelle que $\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$ (et donc par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)! = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1)! = +\infty$).

1°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (n+1)! - n!$ pour tout entier naturel *n*.

L'étude de la limite de u_n lorsque *n* tend vers $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

Démontrer que $u_n = n \times n!$ pour tout entier naturel *n*. En déduire la limite de u_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (n+1) \times n! - n!$$

$$= n! \times (n+1-1)$$

$$= n! \times n$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n! = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2°) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{n}{n!}$ pour tout entier naturel *n*.

L'étude de la limite de v_n lorsque *n* tend vers $+\infty$ fait apparaître une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

En effectuant une transformation de v_n, déterminer la limite de v_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{n}{n \times (n-1)!}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (n-1)! = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Remarque : La réécriture $v_n = n \times \dfrac{1}{n!}$ ne résout pas le problème puisqu'elle fait apparaître une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

VII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ pour tout entier naturel *n*.
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

a. (u_n) est bornée.	b. (u_n) est monotone.	c. (u_n) est convergente.
V	F	F

Le point de cet exercice ne sera accordé que si les trois réponses sont correctes.