TS1

Contrôle du mercredi 27 novembre 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note :** …….. **/ 20**

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère un parallélépipède ABCDEFGH. Soit I le centre de la face BCGF, J un point quelconque de la droite (CG) distinct de C et K un point quelconque de la droite (GH).

1°) Compléter à l'aide du symbole $\in$ ou $\notin$.

$$\mathrm{J} \ldots (\mathrm{BCE}) \qquad\qquad \mathrm{K} \ldots (\mathrm{ABG})$$

2°) La droite (FG) est-elle parallèle au plan (BCE) ? Répondre par oui ou non sans justifier.

……..

3°) Compléter l'égalité :

$$(\mathrm{CEF}) \cap (\mathrm{BGE}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{ax} + \mathrm{e}^{bx}$ où a et b sont des réels.

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points : 2 points + 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1 - \mathrm{e}^{x+2}}{2} = \mathrm{e}^{x}$ (1) et l'inéquation $\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right)^{2} - \left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)^{2} > 4$ (2).

On commencera par chercher au brouillon avant de rédiger au propre sur les lignes ci-dessous.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (4 points : 1 point par calcul)

Dans chaque cas, donner l'expression de $f'(x)$.
On effectuera les calculs au brouillon. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x)=\left(2e^{x}-1\right)^{5}$ $\quad f'(x)=$ ....

2°) $f(x)=x-2\sqrt{1-e^{x}}$ $\quad f'(x)=$ ....

3°) $f(x)=\dfrac{3e^{x}}{e^{x}+2}$ $\quad f'(x)=$ ....

4°) $f(x)=x^{2}\times e^{x}$ $\quad f'(x)=$ .... (factoriser au maximum)

V. (2 points)

Démontrer que la fonction F : $x\mapsto x+\dfrac{4}{e^{x}+1}$ est une primitive de la fonction $f : x\mapsto\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$ sur $\mathbb{R}$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

VI. (2 points)

Déterminer la primitive F de la fonction $f : x\mapsto 3e^{x}+1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F(0)=-1$.

.... (une seule égalité)

VII. (2 points)

Soit x et y deux réels tels que $e^{x+y}-1=e^{x}$.

Exprimer y en fonction de x.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Corrigé du contrôle du 27-11-2019

I.

On considère un parallélépipède ABCDEFGH. Soit I le centre de la face BCGF, J un point quelconque de la droite (CG) distinct de C et K un point quelconque de la droite (GH).

1°) Compléter à l'aide du symbole $\in$ ou $\notin$.

$$J \notin (BCE) \qquad\qquad K \in (ABG)$$

2°) La droite (FG) est-elle parallèle au plan (BCE) ? Répondre par oui ou non sans justifier.

oui

3°) Compléter l'égalité :

$$(CEF)\cap(BGE)=(EI)$$

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\left(e^x\right)^2+\dfrac{1}{e^{-x}}}{\sqrt{e^x}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x)=e^{ax}+e^{bx}$ où a et b sont des réels.

Il s'agit d'effectuer une transformation d'écriture en utilisant les propriétés de l'exponentielle.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\dfrac{e^{2x}+e^x}{e^{\frac{x}{2}}}$ (propriété $\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}$)

$$=\frac{e^{2x}}{e^{\frac{x}{2}}}+\frac{e^x}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$=e^{2x-\frac{x}{2}}+e^{x-\frac{x}{2}}$$

$$=e^{\frac{3x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}$$

On peut donc écrire $f(x)=e^{ax}+e^{bx}$ avec $a=\dfrac{3}{2}$ et $b=\dfrac{1}{2}$.

III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1-e^{x+2}}{2}=e^x$ (1) et l'inéquation $\left(e^x-1\right)^2-\left(e^x+1\right)^2>4$ (2).

On commencera par chercher au brouillon avant de rédiger au propre sur les lignes ci-dessous.

$(1) \Leftrightarrow 1-e^{x+2}=2e^x$

$\Leftrightarrow 1-e^x\times e^2=2e^x$

$\Leftrightarrow 1=e^x\times e^2+2e^x$

$\Leftrightarrow e^x\left(e^2+2\right)=1$

$\Leftrightarrow e^x=\dfrac{1}{e^2+2}$

$\Leftrightarrow x=\ln\dfrac{1}{e^2+2}$ (car $\dfrac{1}{e^2+2}>0$)

[$\Leftrightarrow x=-\ln\left(e^2+2\right)$] ligne facultative, nous verrons cela plus tard par une propriété du logarithme népérien

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1=\left\{\ln\frac{1}{e^2+2}\right\}$$

$(2) \Leftrightarrow \left(e^{2x}-2e^x+1\right)-\left(e^{2x}+2e^x+1\right)>4$

$\Leftrightarrow -4e^x>4$

$\Leftrightarrow e^x<-1$ (impossible car le résultat d'une exponentielle est toujours positive)

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2=\varnothing$$

IV.

Dans chaque cas, donner l'expression de $f'(x)$.
On effectuera les calculs au brouillon. Il est demandé de faire les barres de fractions à la règle.

1°) $f(x)=\left(2e^{x}-1\right)^{5}$ $\qquad f'(x)=10e^{x}\left(2e^{x}-1\right)^{4}$

On utilise la formule $\left(u^{n}\right)'=nu'u^{n-1}$.

2°) $f(x)=x-2\sqrt{1-e^{x}}$ $\qquad f'(x)=1+\dfrac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{x}}}$

On utilise la formule $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$f'(x)=1-2\times\left(\frac{-e^{x}}{\sqrt{1-e^{x}}}\right)$$

3°) $f(x)=\dfrac{3e^{x}}{e^{x}+2}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{6e^{x}}{\left(e^{x}+2\right)^{2}}$

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}}$.

4°) $f(x)=x^{2}\times e^{x}$ $\qquad f'(x)=x(x+2)e^{x}$ (factoriser au maximum)

On utilise la formule de dérivation d'un produit $(uv)'=u'v+uv'$.

V.

Démontrer que la fonction F : $x\mapsto x+\dfrac{4}{e^{x}+1}$ est une primitive de la fonction $f: x\mapsto\left(\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$ sur $\mathbb{R}$.

On doit démontrer que la dérivée de F est égale à *f*.

Pour calculer plus facilement la dérivée de F, on effectue la réécriture $F(x)=x+4\times\dfrac{1}{e^{x}+1}$.

On utilisera alors la formule de dérivation $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^{2}}$ à l'intérieur du calcul.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=1+4\times\left[-\frac{e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}\right]$$

$$=1-\frac{4e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$=\frac{\left(e^{x}+1\right)^{2}-4e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$=\frac{e^{2x}+2e^{x}+1-4e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$=\frac{e^{2x}-2e^{x}+1}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$=\frac{\left(e^{x}-1\right)^{2}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$$

$$=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$$

$$=f(x)$$

On en déduit que F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

VI.

Déterminer la primitive F de la fonction $f : x \mapsto 3\mathrm{e}^x + 1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\mathrm{F}(0) = -1$.

$$\mathrm{F}(x) = 3\mathrm{e}^x + x - 4 \quad \text{(une seule égalité)}$$

Il faut bien penser à la constante.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto 3\mathrm{e}^x + x$. D'après une propriété du cours, les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions $\mathrm{F} : x \mapsto 3\mathrm{e}^x + x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

On cherche k tel que $\mathrm{F}(0) = -1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow 3\mathrm{e}^0 + 0 + k = -1$

$\Leftrightarrow 3 + k = -1$

$\Leftrightarrow k = -4$

La primitive de la fonction f vérifiant $\mathrm{F}(0) = -1$ est donc la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto 3\mathrm{e}^x + x - 4$.

VII.

Soit x et y deux réels tels que $\mathrm{e}^{x+y} - 1 = \mathrm{e}^x$.

Exprimer y en fonction de x.

On transforme la relation $\mathrm{e}^{x+y} - 1 = \mathrm{e}^x \quad (1)$ de manière à isoler y.

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y - 1 = \mathrm{e}^x$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = 1 + \mathrm{e}^x$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^y = \dfrac{1 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^y = 1 + \mathrm{e}^{-x}$ $\qquad\qquad$ $\Leftrightarrow y = \ln \dfrac{1 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} \quad \left(\text{car } \dfrac{1 + \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} > 0\right)$

$\Leftrightarrow y = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)$

On ne peut pas aller plus loin.