TS1

Contrôle du lundi 4 novembre 2019 (4 heures)

Partie pour les élèves n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques à rédiger sur copie

(1 heure)

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^3 + z = z^2$ (1) et $z^4 = 81$ (2).

II. (3 points)

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\mathrm{i}a}}$ où a est un réel non nul.

Pour les exercices **III** et **IV**, on rappelle que la notation $\mathrm{E}(a)$ désigne la partie entière d'un réel a.

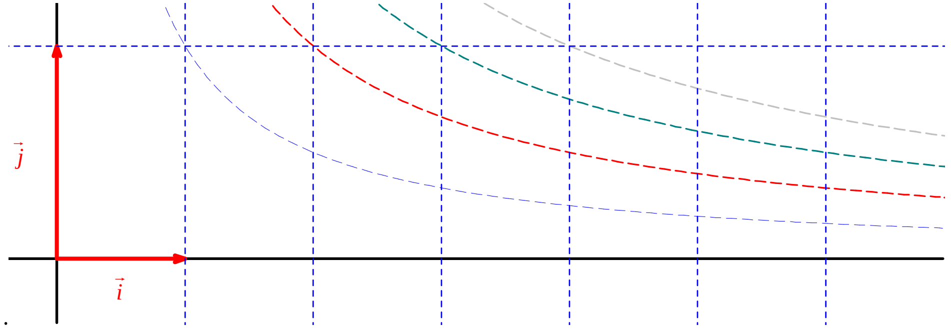
III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) À partir de la définition de la fonction partie entière, donner l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in]0\,;1[$ puis lorsque $x \in [1\,;2[$.

2°) Déterminer l'image d'un entier relatif quelconque non nul par f en justifiant.

3°) Tracer la représentation graphique de f sur le graphique ci-dessous. On fera apparaître clairement les points d'abscisses entières.



IV. (3 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble F des points M de P de coordonnées $(x\,;y)$ tels que $\mathrm{E}(x^2+y^2) = 0$.

V. (4 points : 1 point + 1 point + 2 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère le polynôme $P(x) = (x-1)(x-2)...(x-n)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1°) Quel est le degré de $P(x)$? On répondra sans justifier.

2°) Quelles sont les racines réelles de $P(x)$?

3°) Exprimer $P(0)$ en fonction de n.

VI. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2+1} = 3$.

Corrigé du contrôle du 4-11-2019 (partie non spé)

I.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^3 + z = z^2 \quad (1)$ et $z^4 = 81 \quad (2)$.

$(1) \Leftrightarrow z^3 - z^2 - z = 0$

$\Leftrightarrow z\left(z^2 - z - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow z = 0$ ou $z^2 - z - 1 = 0 \quad (1')$

$(1')$ est une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant est égal à – 3.

Elle admet donc deux racines complexes conjuguées égales à $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$$S_1 = \left\{0\,;\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$$

On vérifie la réponse grâce à la calculatrice.

$(2) \Leftrightarrow \left(z^2\right)^2 = 81$

$\Leftrightarrow z^2 = 9 \quad (2')$ ou $z^2 = -9 \quad (2'')$

$(2') \Leftrightarrow z = 3$ ou $z = -3$

$(2'') \Leftrightarrow z = 3\mathrm{i}$ ou $z = -3\mathrm{i}$ (directement sans calcul de discriminant)

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2 = \{3\,;-3\,;3\mathrm{i}\,;-3\mathrm{i}\}$$

On vérifie la réponse grâce à la calculatrice.

II.

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $z = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\mathrm{i}a}}$ où a est un réel non nul.

$$z = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\mathrm{i}a}}$$

$$= \dfrac{1}{1-\dfrac{\mathrm{i}}{a}}$$

$$= \dfrac{1}{\dfrac{a-\mathrm{i}}{a}}$$

$$= \dfrac{a}{a-\mathrm{i}}$$

$$= \dfrac{a\times(a+\mathrm{i})}{(a-\mathrm{i})\times(a+\mathrm{i})}$$

$$= \dfrac{a+\mathrm{i}a}{a^2+1}$$

Pour les exercices **III** et **IV**, on rappelle que la notation $\mathrm{E}(a)$ désigne la partie entière d'un réel a.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

1°) À partir de la définition de la fonction partie entière, donner l'expression de $f(x)$ lorsque $x \in \left]0\,;1\right[$ puis lorsque $x \in \left[1\,;2\right[$.

- $\forall x \in \left]0\,;1\right[\quad \mathrm{E}(x) = 0$ donc $\forall x \in \left]0\,;1\right[\quad f(x) = 0$.
- $\forall x \in \left[1\,;2\right[\quad \mathrm{E}(x) = 1$ donc $\forall x \in \left[1\,;2\right[\quad f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2°) Déterminer l'image d'un entier relatif quelconque non nul par f en justifiant.

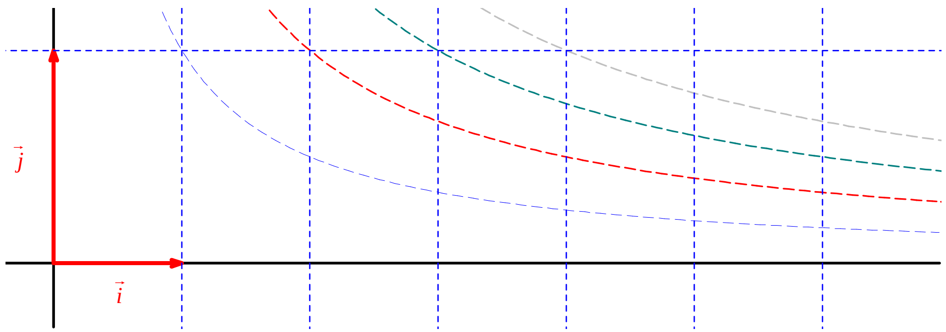
Soit x un entier relatif quelconque non nul.

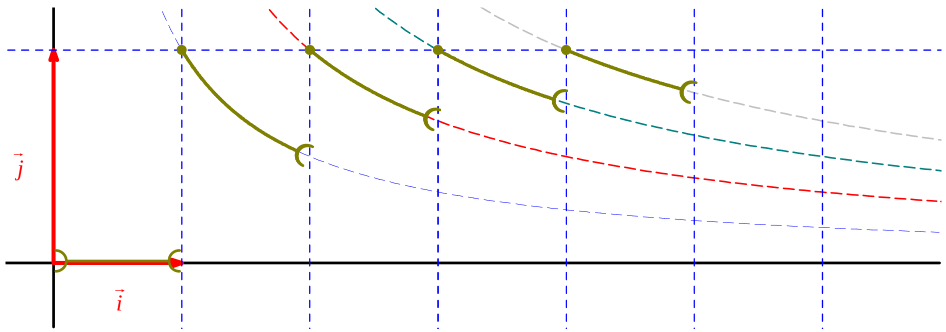
On sait que la partie entière d'un entier relatif quelconque est égale à lui-même donc $\mathrm{E}(x) = x$.

On en déduit que $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$.

Ainsi l'image par f de n'importe quel entier relatif non nul est égale à 1.

3°) Tracer la représentation graphique de f sur le graphique ci-dessous. On fera apparaître clairement les points d'abscisses entières.





IV.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Déterminer l'ensemble F des points M de P de coordonnées $(x\,;\,y)$ tels que $\text{E}\left(x^2+y^2\right)=0$.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\text{M}\in F \Leftrightarrow 0\leqslant x^2+y^2<1$ (par définition de la partie entière d'un réel)

$\Leftrightarrow x^2+y^2<1$ (on laisse tomber l'inégalité de gauche qui est toujours vraie)

$\Leftrightarrow \text{OM}^2<1$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow \text{OM}<1$ (ligne sans coordonnées)

Conclusion :

On en déduit que F est le disque ouvert de centre O et de rayon 1.

V.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère le polynôme $P(x)=(x-1)(x-2)...(x-n)$ avec $x\in\mathbb{R}$.

1°) Quel est le degré de $P(x)$? On répondra sans justifier.

$P(x)$ est le produit de n facteurs de degré 1 donc le degré de $P(x)$ est égal à n.

2°) Quelles sont les racines réelles de $P(x)$?

Les racines réelles de $P(x)$ sont les solutions de l'équation $P(x)=0$.

Les racines réelles de $P(x)$ sont donc 1, 2, 3, …, n.

3°) Exprimer $P(0)$ en fonction de n.

$P(0)=(0-1)(0-2)...(0-n)$

$=(-1)(-2)...(-n)$

$=(-1)^n 1\times 2\times...\times n$

$=(-1)^n n!$ (on utilise la notation de factorielle)

VI.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2+1}=3$.

$(1) \Leftrightarrow x^2+1=9$ (il y a équivalences car les deux membres sont positifs ou nuls)

$\Leftrightarrow x^2=8$

$\Leftrightarrow x=2\sqrt{2}$ ou $x=-2\sqrt{2}$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

$S=\left\{2\sqrt{2}\,;-2\sqrt{2}\right\}$