1$^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 8 novembre 2019 (50 minutes)

À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

Numéro : …..

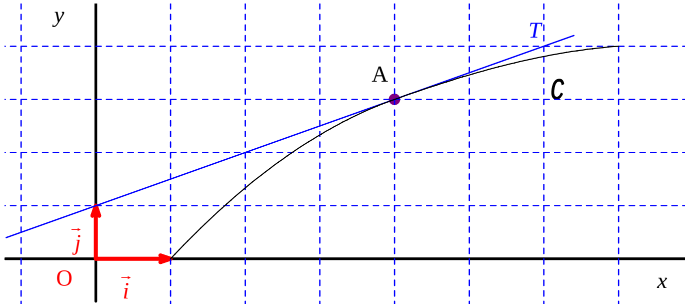
Prénom et nom : ……………………………………………….

Note : ….. / 20

Il est demandé de ne rien écrire sur les graphiques et sur les figures.

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous. La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente T au point A d'abscisse 4.



1°) Par lecture graphique, compléter l'égalité : $f\,'(4) = $………. .

2°) Écrire une équation de T.

………………………………………… (une seule réponse)

II. (6 points : 1°) 2 point + 2 points ; 2°) 2 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Soit h un réel quelconque non nul.

Calculer au brouillon $f(2)$, $f(2+h)$, $f(2+h) - f(2)$, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

Compléter l'égalité suivante :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \text{…………………………}$$

Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers …… .

En déduire que f est dérivable en 2 et donner le nombre dérivé de f en 2. On répondra par une phrase.

……

……

……

Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

2°) Quel est le maximum global de la fonction f sur $\mathbb{R}$? En quel réel est-il atteint ?

……

……

III. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2 + \dfrac{x^2+1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

Simplifier l'expression de $f(x)$ pour tout réel x différent de 0 et de – 1.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Vérifier que $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{|x+1|}$.

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

À tout réel m on associe le polynôme $P_m(x) = m(x-1)^2 - x(x-2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminer son degré (discuter suivant les valeurs de m).
2°) Lorsque $P_m(x)$ est un polynôme du second degré, calculer son discriminant Δ_m en fonction de m.
On donnera le résultat sous forme développée réduite.

……

……

……

……

……

……

……

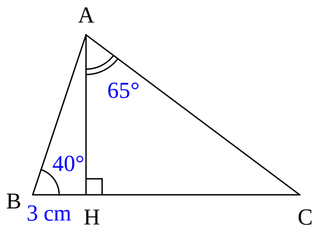
……

……

……

V. (2 points)

On considère la figure ci-dessous.



On pose $\text{AH} = x$ cm et $\text{CH} = y$ cm.

Déterminer les valeurs exactes de x et de y.
À l'aide de la calculatrice, donner ensuite les valeurs décimales approchées au millième par défaut de x et de y.

$x = $ ………………………… ; $y = $ …………………………

La valeur décimale approchée au millième par défaut de x est ………. .

La valeur décimale approchée au millième par défaut de y est ………. .

VI. (2 points)

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r où r est un réel strictement positif donné.

Écrire une équation de $\mathcal{C}$.

…………………………………

• On considère la fonction écrite ci-dessous en langage naturel dans le cadre de gauche dont le script correspondant en langage Python est donné dans le cadre de droite.
Cette fonction a pour but de dire si un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ appartient au cercle de centre O et de rayon r.
Compléter le cadre de gauche et le cadre de droite.

Fonction appart_cercle(x, y, r) **Si** ……………………………….. Alors renvoyer Vrai **Sinon** renvoyer Faux **FinSi**	def appart_cercle(x, y, r) : if ……………………………== ….. : return(True) else : return(False)

• On désire créer une fonction **appart_disque**(x, y, r) qui a pour but de dire si un point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ appartient au disque fermé de centre O et de rayon r.
Comment faut-il alors modifier l'instruction conditionnelle dans la fonction **appart-cercle** ?

………………………… (une seule réponse)

VII. (2 points)

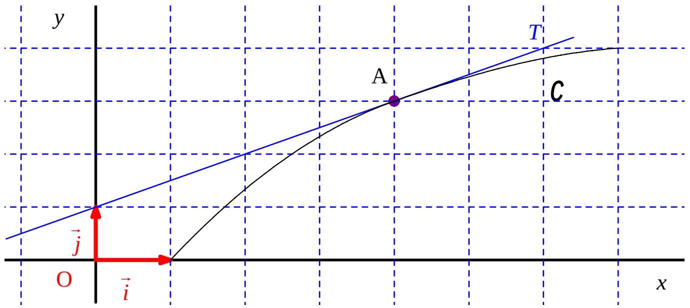
Écrire l'ensemble des solutions de l'équation $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

……………………………………

Corrigé du contrôle du 8-11-2019

I.

On considère une fonction f dont la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est donnée sur le graphique ci-dessous. La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente T au point A d'abscisse 4.



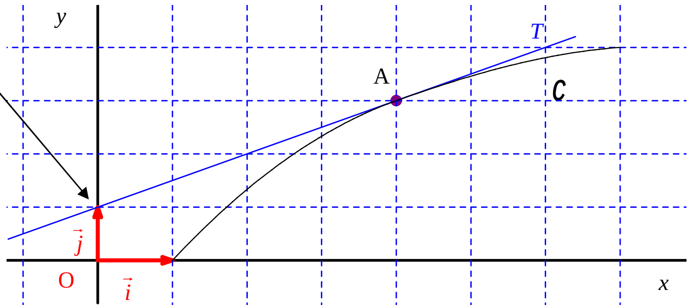
1°) Par lecture graphique, compléter l'égalité : $f'(4)=\dfrac{1}{2}$.

On lit le coefficient directeur de T.

2°) Écrire une équation de T.

$$y=\frac{1}{2}x+1 \text{ (une seule réponse)}$$

On trouve cette équation réduite en observant que le coefficient directeur de T est $\dfrac{1}{2}$ et que l'ordonnée à l'origine est égale à 1.



On peut éventuellement utiliser la formule donnant l'équation d'une tangente [mais ce n'est pas très utile ici.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto x-x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Soit h un réel quelconque non nul.

Calculer au brouillon $f(2)$, $f(2+h)$, $f(2+h)-f(2)$, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

Compléter l'égalité suivante :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-h-3$$

$f(2)=2-2^2=-2$

$$\begin{aligned}f(2+h)&=(2+h)-(2+h)^2\\&=2+h-\left(4+4h+h^2\right)\\&=2+h-4-4h-h^2\\&=-2-3h-h^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(2+h)-f(2)&=-3h-h^2\\&=h(-3-h)\end{aligned}$$ (le h se met en facteur, ce qui est normal)

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=-h-3$$

Compléter par un nombre la phrase suivante :

Lorsque h tend vers 0, le quotient $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ sous forme simplifiée tend vers – 3

En déduire que f est dérivable en 2 et donner le nombre dérivé de f en 2. On répondra par une phrase.

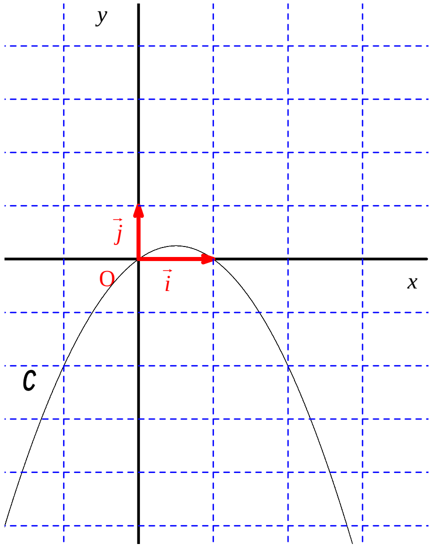
Le résultat de cette limite est fini donc on peut affirmer que f est dérivable en 2 et que le nombre dérivé de f en 2 est égal à – 3. On peut écrire $f'(2)=-3$.

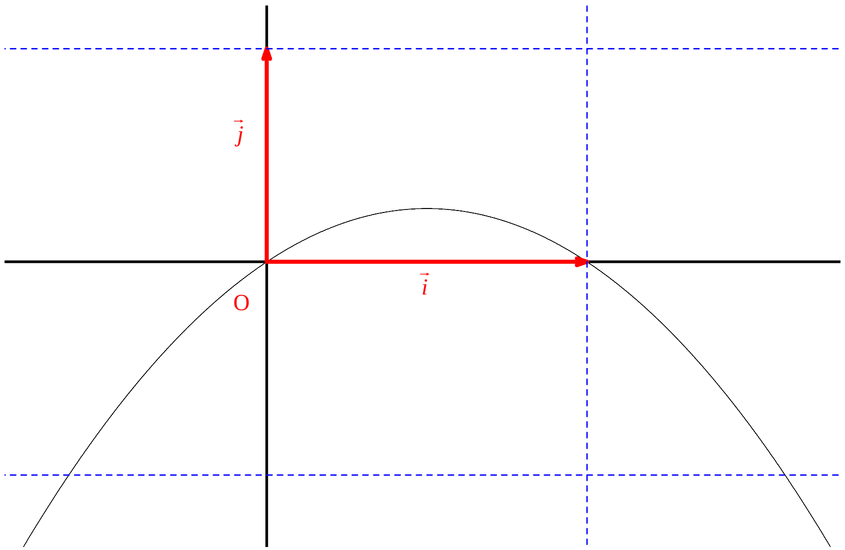
Vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice.

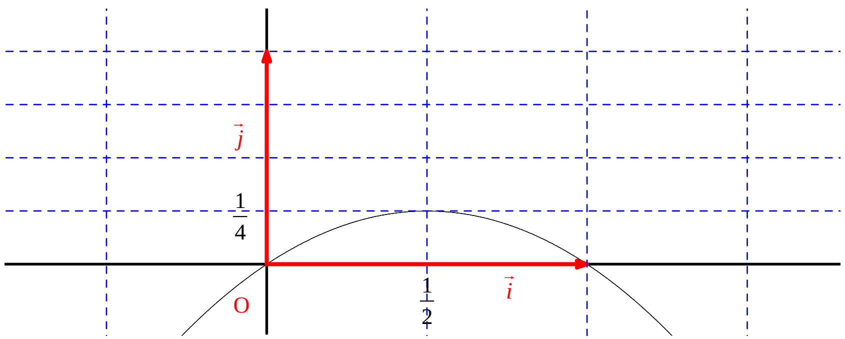
2°) Quel est le maximum global de la fonction f sur $\mathbb{R}$? En quel réel est-il atteint ?

Le maximum global de f sur $\mathbb{R}$ est égal à $\dfrac{1}{4}$; il est atteint en $\dfrac{1}{2}$.

On peut utiliser la calculatrice en effectuant des zooms successifs pour visualiser le maximum.







On applique le cours sur les fonctions polynômes du second degré.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

Variations
2 cas

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

Minimum global atteint en $-\frac{b}{2a}$

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
Variations de f	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘

Maximum global atteint en $-\frac{b}{2a}$

Version rédigée :

Il faut commencer par dire que f est une fonction polynôme du second degré.
On a $f(x) = x - x^2$ que l'on peut écrire sous la forme $f(x) = -x^2 + x$.
Le coefficient de x^2 est strictement négatif donc f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ atteint en $-\frac{1}{2\times(-1)} = \frac{1}{2}$ (on est dans le 2^e^ cas). La valeur de ce maximum est $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

On peut éventuellement partir du tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de f	↗	$\frac{1}{4}$	↘

D'après le tableau de variations, f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ égal à $\frac{1}{4}$ atteint pour $x = \frac{1}{2}$.

Autre méthode :

On écrit $f(x)$ sous forme canonique.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Cette écriture permet de bien voir que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}$ égal à $\frac{1}{4}$ atteint pour $x = \frac{1}{2}$.

Remarque :

Le maximum est visible sur la calculatrice en traçant la courbe représentative de f à condition de choisir une bonne fenêtre graphique.

Un tableau de valeurs avec un pas de 1 ne permet pas de trouver ce maximum.

On peut aussi utiliser l'outil de la calculatrice permettant de déterminer le maximum d'une fonction sur un intervalle fermé borné.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2+\dfrac{x^2+1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

Simplifier l'expression de $f(x)$ pour tout réel x différent de 0 et de – 1.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Vérifier que $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{|x+1|}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\} \quad f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{2x+x^2+1}{x}}$

$= \dfrac{x}{2x+x^2+1}$

$= \dfrac{x}{(x+1)^2}$ (reconnaissance d'une identité remarquable au dénominateur)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{(x+1)^2}}$

$= \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)^2}}$ (propriété des racines carrées)

$= \dfrac{\sqrt{x}}{|x+1|}$ (propriété $\sqrt{X^2} = |X|$)

IV.

À tout réel m on associe le polynôme $P_m(x) = m(x-1)^2 - x(x-2)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminer son degré (discuter suivant les valeurs de m).

On commence par développer et réduire $P_m(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_m(x) = m(x^2-2x+1) - x^2 + 2x$

$= mx^2 - 2mx + m - x^2 + 2x$

$= (m-1)x^2 + (2-2m)x + m$

On peut donc affirmer que $P_m(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à 2.

On discute suivant le coefficient de x^2 c'est-à-dire $m-1$.

1$^{\text{er}}$ cas : $m \neq 1$

Dans ce cas, $m-1 \neq 0$. $P_m(x)$ est donc un polynôme du second degré.

2$^{\text{e}}$ cas : $m = 1$

Dans ce cas, $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_1(x) = 1$. $P_1(x)$ est donc un polynôme constant donc de degré 0.

2°) Lorsque $P_m(x)$ est un polynôme du second degré, calculer son discriminant Δ_m en fonction de m.
On donnera le résultat sous forme développée réduite.

On se place dans le cas où $m \neq 1$.

Les coefficients du polynôme sont $m-1$ (coefficient de x^2), $2-2m$ (coefficient de x), m (coefficient constant).

$\Delta_m = (2-2m)^2 - 4 \times (m-1) \times m$ (formule de définition du discriminant)

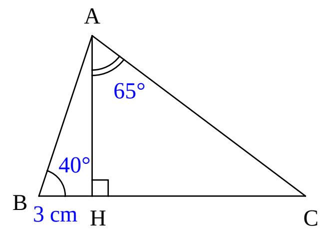
$= (2-2m)^2 - 4m(m-1)$

$= 4 - 8m \cancel{+4m^2} \cancel{-4m^2} + 4m$ (identité remarquable)

$= 4 - 4m$

V.

On considère la figure ci-dessous.



On pose $\text{AH} = x$ cm et $\text{CH} = y$ cm.

Déterminer les valeurs exactes de x et de y.
À l'aide de la calculatrice, donner ensuite les valeurs décimales approchées au millième par défaut de x et de y.

$$x = 3\tan 40° \ ; \ y = 3\tan 40° \times \tan 65°$$

La valeur décimale approchée au dixième par défaut de x est 2,5.

La valeur décimale approchée au dixième par défaut de y est 5,3.

$x = 2{,}517229889...$

$y = 5{,}39836489...$

VI.

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r où r est un réel strictement positif donné.

Écrire une équation de $\mathcal{C}$.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

• On considère la fonction écrite ci-dessous en langage naturel dans le cadre de gauche dont le script correspondant en langage Python est donné dans le cadre de droite.
Cette fonction a pour but de dire si un point M de coordonnées $(x \ ; y)$ appartient au cercle de centre O et de rayon r.
Compléter le cadre de gauche et le cadre de droite.

Fonction appart_cercle(x, y, r)
  Si $x^2 + y^2 = r^2$
    Alors renvoyer Vrai
    Sinon renvoyer Faux
  FinSi

```
def appart_cercle(x, y, r) :
    if x**2+y**2==r**2 :
        return(True)
    else :
        return(False)
```

On notera que Vrai et Faux (True et False) sont des *variables booléennes*.

• On désire créer une fonction **appart_disque**(x, y, r) qui a pour but de dire si un point M de coordonnées $(x \ ; y)$ appartient au disque fermé de centre O et de rayon r.
Comment faut-il alors modifier l'instruction conditionnelle dans la fonction **appart-cercle** ?

$$x^2 + y^2 \leqslant r^2 \quad \text{(une seule réponse)}$$

VII.

Écrire l'ensemble des solutions de l'équation $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{3}} \ ; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$$

On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 4 \quad (1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$x^2 - \cancel{2x} + 1 + x^2 + x^2 + \cancel{2x} + 1 = 4$

$3x^2 = 2$

$x^2 = \dfrac{2}{3}$

$x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$