TS1

Contrôle du mercredi 13 novembre 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : ……… / 20**

Les figures ne doivent pas comporter d'autres tracés que ceux demandés explicitement dans l'énoncé.

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ définie sur l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.

………

………

………

2°) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note A le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses et on note T la tangente en A à $\mathcal{C}$.
Calculer le coefficient directeur de T.

……… (une seule réponse sans égalité)

3°) Déterminer une primitive F de f sur I. On donnera la réponse sans justifier.

…………………………………………… (une seule égalité)

II. (3 points : 1 point + 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que pour tout réel x, on a $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. On attend seulement trois lignes de calcul.

………

………

………

Calculer $f''(x)$. On attend le résultat sous la forme d'un seul quotient le plus simple possible.

Indication : On écrira $f'(x)=\left(1-x^2\right)\times\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$ pour effectuer la dérivation.

………

………

………

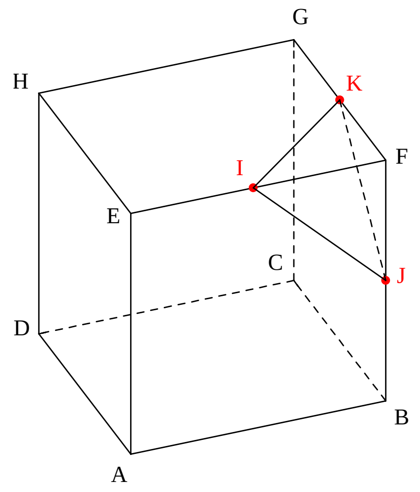
………

………

………

III. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 2 points)

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes $[\mathrm{FE}]$, $[\mathrm{FB}]$ et $[\mathrm{FG}]$.



1°) Dans chaque cas, dire si les deux droites sont coplanaires. Répondre par oui ou non sans justifier.

(DE) et (IJ)	(DK) et (AG)	(IK) et (BD)
………	………	………

2°) Le but de cette question est de démontrer que (JK) est parallèle au plan (AGH).

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① Par le théorème dit « de la droite des milieux dans un triangle », on peut affirmer que $(\mathrm{JK}) // (\mathrm{BG})$.

② On en déduit que $(\mathrm{JK}) // (\mathrm{AGH})$.

③ Par ailleurs, la droite (BG) est incluse dans le plan (AGH).

④ Par hypothèse, on sait que J et K sont les milieux respectifs des côtés $[\mathrm{FB}]$ et $[\mathrm{FG}]$.

⑤ On travaille dans le triangle BFG.

⑥ Or si une droite est parallèle à une droite incluse dans un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

…...………

3°) Une des quatre figures ci-dessous correspond au patron du tétraèdre FIJK. Aucune justification n'est attendue.

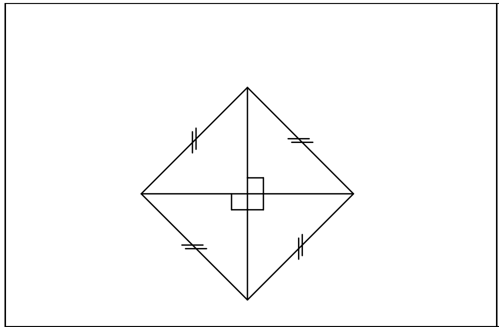


Fig. 1

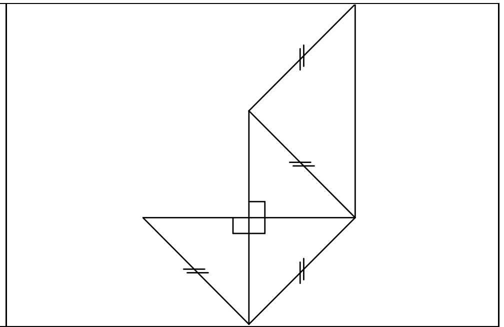


Fig. 2

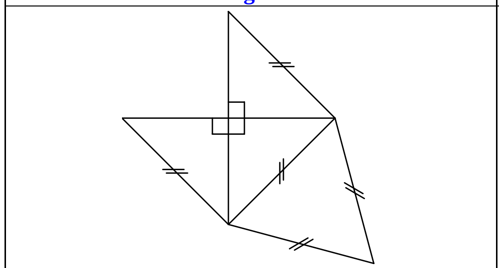


Fig. 3

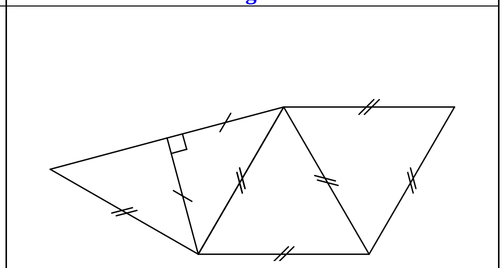


Fig. 4

Réponse : ……………………...

4°) On note a l'arête du cube. Exprimer le volume V du tétraèdre FIJK en fonction de a.

……………………..………………………………………………………………………………..…………

……

……………………..………………………………………………………………………………..…………

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Sur la figure de gauche en bas de cette feuille, ABCD est un tétraèdre et I est un point quelconque de la droite (AD), distinct de D. On note P le plan passant par I parallèle à (ABC). P coupe la droite (BD) en un point J.

1°) Quelles sont les droites d'intersection du plan (ABD) avec les plans (ABC) et P ?

…… (une seule réponse) …… (une seule réponse)

2°) Citer le théorème qui permet d'affirmer que $(\mathrm{IJ}) // (\mathrm{AB})$. Placer J sur la figure.

……

……………………..………………………………………………………………………………..…………

3°) On note Δ la droite d'intersection des plans (ABC) et (CIJ).

Donner le nom du théorème qui permet de justifier l'affirmation « $\Delta // (\mathrm{AB})$ ». Tracer Δ sur la figure.

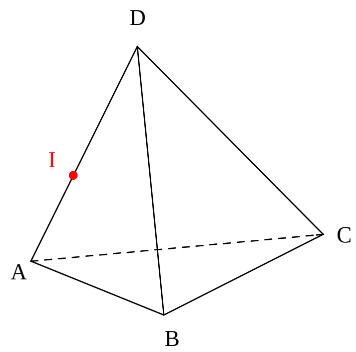
………………………………………………

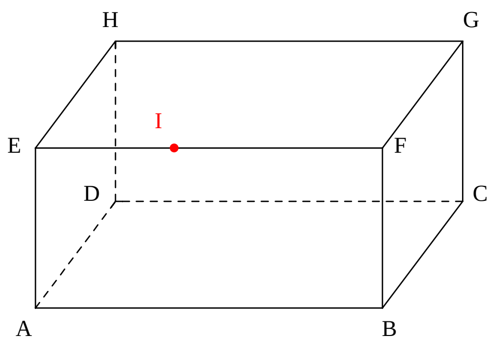
V. (2 points)

Sur la figure de droite en bas de cette feuille, ABCDEFGH est un pavé droit et I est un point quelconque de $]\mathrm{EF}[$.

Tracer la section du pavé droit par le plan (ACI) en utilisant la méthode de tracé hors-solide.

On laissera apparents les traits de construction. On nommera les points de construction.
On pensera à respecter la convention habituelle des pointillés en perspective cavalière.





Corrigé du contrôle du 13-11-2019

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto 1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ définie sur l'intervalle $I=\left]0\,;+\infty\right[$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.

Pour dériver plus commodément, on effectue la réécriture $f(x)=1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$\forall x\in I \quad f'(x)=0-\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\right)$ (plusieurs formules dont $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$)

$$=\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

Sachant que $\sqrt{x}$ peut s'écrire $x^{\frac{1}{2}}$, on pourrait donner le résultat de la dérivée sous la forme $f'(x)=\dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$.

2°) Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On note A le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses et on note T la tangente en A à $\mathcal{C}$.
Calculer le coefficient directeur de T.

4 (une seule réponse sans égalité)

Pour trouver l'abscisse de A, on résout l'équation $f(x)=0 \quad (1)$ dans l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

$(1) \Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0$

$\Leftrightarrow 1=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$

A a pour abscisse $\dfrac{1}{4}$.

On calcule le nombre dérivé de f en $\dfrac{1}{4}$.

$f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4\times\frac{1}{4}\times\sqrt{\frac{1}{4}}}$

$=\dfrac{1}{\cancel{4}\times\frac{1}{\cancel{4}}\times\frac{1}{2}}$

$=2$

On contrôle le résultat grâce à la calculatrice.

3°) Déterminer une primitive F de f sur I. On donnera la réponse sans justifier.

$\mathrm{F}(x)=x-\sqrt{x}$ (une seule égalité)

On peut aussi ajouter n'importe quelle constante additive. Par exemple, les expressions $x-\sqrt{x}+1$, $x-\sqrt{x}+324$, $x-\sqrt{x}+\pi$, $x-\sqrt{x}+\sqrt{2}$ conviennent aussi.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que pour tout réel x, on a $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$. On attend seulement trois lignes de calcul.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\dfrac{1\times\left(1+x^2\right)-x\times 2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

$$=\frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Calculer $f''(x)$. On attend le résultat sous la forme d'un seul quotient le plus simple possible.

Indication : On écrira $f'(x)=\left(1-x^2\right)\times\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$ pour effectuer la dérivation.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f''(x)=(-2x)\times\dfrac{1}{(1+x^2)^2}+(1-x^2)\times\left(-\dfrac{2\times 2x}{(1+x^2)^3}\right)$ (on applique plusieurs formules de dérivation dont la formule de dérivation d'un produit et celle $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)'=-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$)

$$=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}-\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

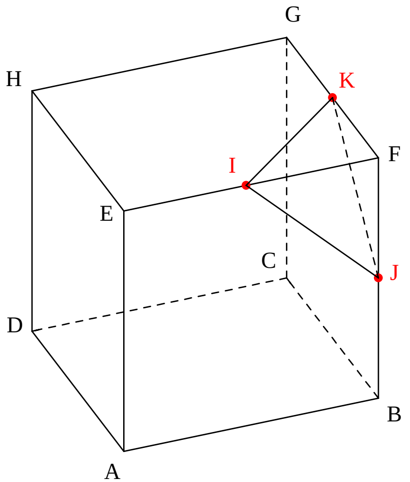
$$=-\frac{2x(1+x^2)}{(1+x^2)^3}-\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$=\frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}$$

III.

Sur la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes $[\mathrm{FE}]$, $[\mathrm{FB}]$ et $[\mathrm{FG}]$.



1°) Dans chaque cas, dire si les deux droites sont coplanaires. Répondre par oui ou non sans justifier.

(DE) et (IJ)	(DK) et (AG)	(IK) et (BD)
Non	oui	non

Les droites (DK) et (AG) sont coplanaires sécantes : elles sont toutes les deux incluses dans le plan qui contient les points A, D, F, G.

2°) Le but de cette question est de démontrer que (JK) est parallèle au plan (AGH).

On donne ci-dessous dans le désordre les différentes phrases qui permettent de démontrer ce résultat.

① Par le théorème dit « de la droite des milieux dans un triangle », on peut affirmer que $(\mathrm{JK})\ //\ (\mathrm{BG})$.
② On en déduit que $(\mathrm{JK})\ //\ (\mathrm{AGH})$.
③ Par ailleurs, la droite (BG) est incluse dans le plan (AGH).
④ Par hypothèse, on sait que J et K sont les milieux respectifs des côtés $[\mathrm{FB}]$ et $[\mathrm{FG}]$.
⑤ On travaille dans le triangle BFG.
⑥ Or si une droite est parallèle à une droite incluse dans un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

Remettre les phrases dans l'ordre en écrivant uniquement les numéros sur la ligne ci-dessous.

⑤ ④ ① ③ ⑥ ②

3°) Une des quatre figures ci-dessous correspond au patron du tétraèdre FIJK. Aucune justification n'est attendue.

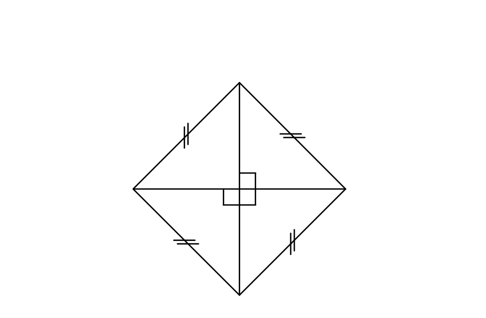


Fig. 1

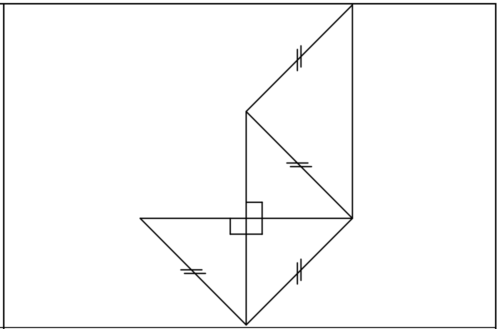


Fig. 2

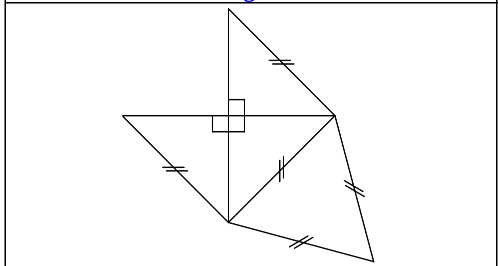


Fig. 3

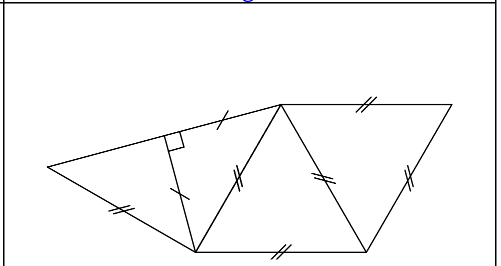


Fig. 4

Réponse : Figure 3

4°) On note a l'arête du cube. Exprimer le volume V du tétraèdre FIJK en fonction de a.

On applique la formule du volume d'une pyramide à savoir $\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

Dans notre situation, la seule base à ne pas prendre est IJK pour laquelle on ne connaît pas la hauteur correspondante.

On peut par exemple prendre pour base le triangle FIJ. La hauteur correspondante est le segment $[\mathrm{FK}]$.

On a donc $V = \dfrac{\mathcal{A}_{\mathrm{FIJ}} \times \mathrm{FK}}{3}$.

$$\mathcal{A}_{\mathrm{FIJ}} = \frac{\mathrm{FI} \times \mathrm{FJ}}{2}$$

$$V = \frac{\dfrac{\mathrm{FI} \times \mathrm{FJ}}{2} \times \mathrm{FK}}{3}$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{FI} \times \mathrm{FJ} \times \mathrm{FK}}{2}}{3}$$

$$= \frac{\mathrm{FI}^3}{6} \quad (\text{car } \mathrm{FI} = \mathrm{FJ} = \mathrm{FK})$$

$$= \frac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^3}{6} \quad \left(\text{car } \mathrm{FI} = \frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{a^3}{8}}{6}$$

$$= \frac{a^3}{48}$$

IV.

Sur la figure de gauche en bas de cette feuille, ABCD est un tétraèdre et I est un point quelconque de la droite (AD), distinct de D. On note P le plan passant par I parallèle à (ABC). P coupe la droite (BD) en un point J.

1°) Quelles sont les droites d'intersection du plan (ABD) avec les plans (ABC) et P ?

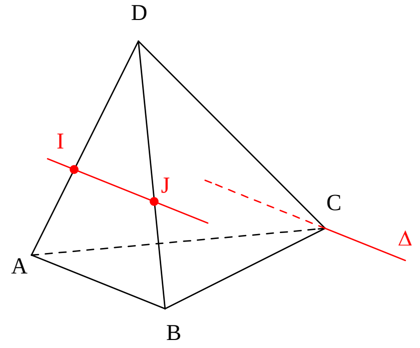
(AB) (une seule réponse) $\qquad$ (IJ) (une seule réponse)

On doit impérativement utiliser des parenthèses pour écrire les droites.

On peut écrire $(\mathrm{ABD}) \cap (\mathrm{ABC}) = (\mathrm{AB})$ et $(\mathrm{ABD}) \cap P = (\mathrm{IJ})$.

2°) Citer le théorème qui permet d'affirmer que $(\mathrm{IJ})\ //\ (\mathrm{AB})$. Placer J sur la figure.

Si deux plans parallèles sont coupés par un même plan, alors les droites d'intersection sont parallèles.



Il n'est pas nécessaire de représenter P. On peut se contenter de l'imaginer.

3°) On note Δ la droite d'intersection des plans (ABC) et (CIJ).

Donner le nom du théorème qui permet de justifier l'affirmation « $\Delta\ //\ (\mathrm{AB})$ ». Tracer Δ sur la figure.

Théorème du toit

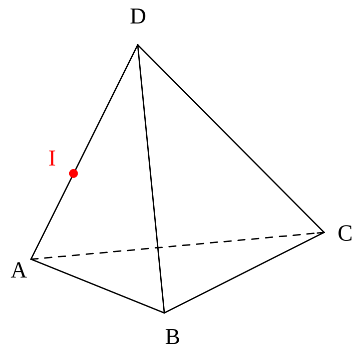
Δ est la droite passant par C parallèle à (AB).

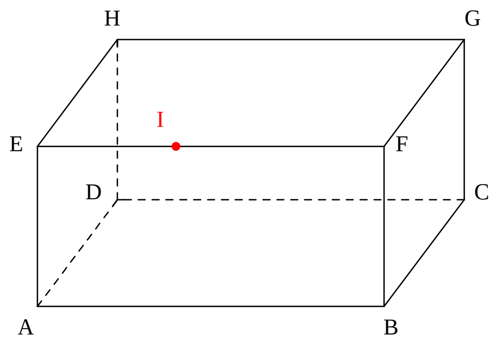
V.

Sur la figure de droite en bas de cette feuille, ABCDEFGH est un pavé droit et I est un point quelconque de $]\mathrm{EF}[$.

Tracer la section du pavé droit par le plan (ACI) en utilisant la méthode de tracé hors-solide.

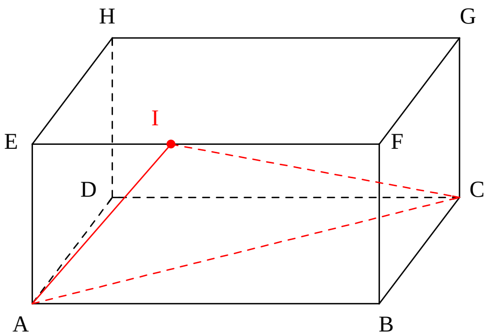
On laissera apparents les traits de construction. On nommera les points de construction.
On pensera à respecter la convention habituelle des pointillés en perspective cavalière.



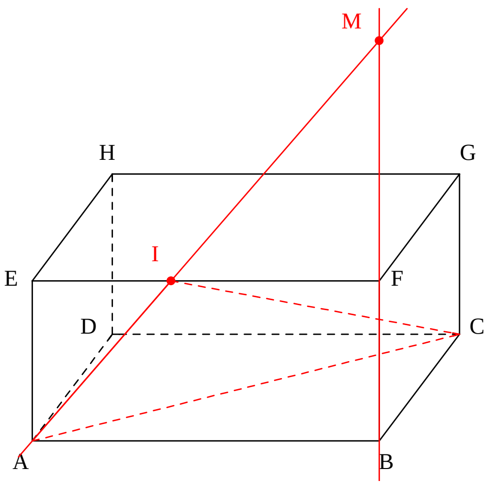


On utilise la méthode de prolongement hors-solide.

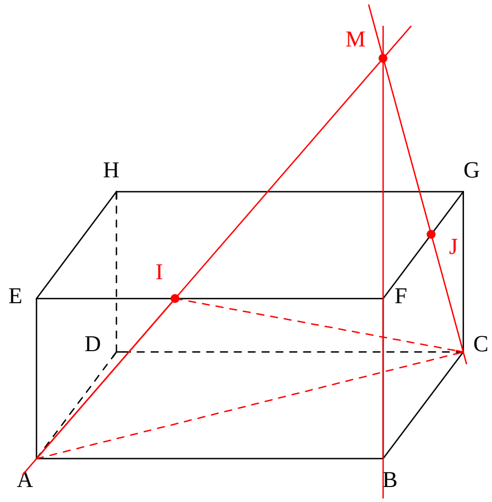
Étape 1 :



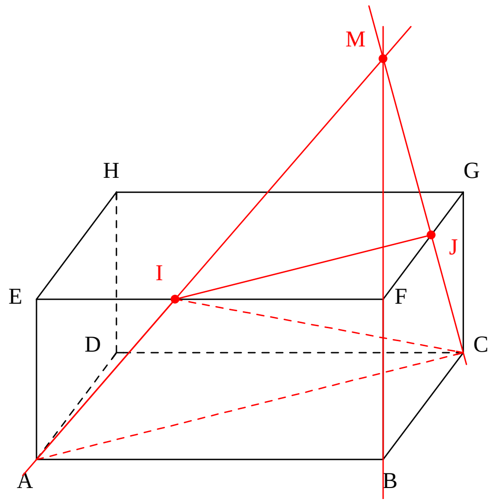
Étape 2 :



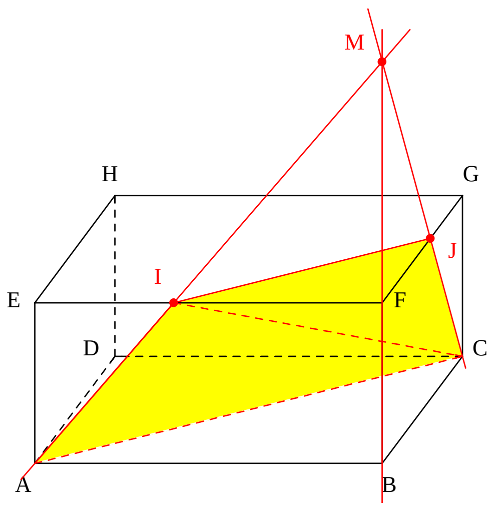
Étape 3 :



Étape 4 :



Il vaut mieux ne pas tracer le segment $[CI]$.



On construit le point M d'intersection des droites (AI) et (BF).

On construit ensuite le point J d'intersection des droites (CM) et (FG).

La section du pavé droit par le plan (ACI) est le quadrilatère AIJC qui est un trapèze (isocèle).

En effet, le parallélisme des droites (AB) et (IJ) se justifie par la propriété « Si deux plans parallèles sont coupés par un même plan, alors les droites d'intersection sont parallèles. ».