TS1

Contrôle du lundi 4 novembre 2019 (3 heures)

Partie commune à tous les élèves (2 heures)

Prénom et nom : …………………………………………..…………… **Note :** ……../ 20

I. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^4 + 4x^3 + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ puis déterminer la (ou les) valeur(s) d'annulation de f'.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = $ .... (un seul résultat sous forme factorisée)

f' s'annule en ………………………………………… .

Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = 3 \quad (\text{E})$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [0\,;1]$.

………

………

………

………

………

………

On note α la solution de (E). Appliquer quatre fois « à la main » en détaillant les étapes la méthode de dichotomie pour obtenir des encadrements de α en complétant le tableau suivant.
On écrira les valeurs sous forme décimale (et non sous forme fractionnaire) en donnant des troncature au millième pour les valeurs de $f(c)$. Dans la colonne de test, on se contentera d'écrire V (vrai) ou F (faux).

a	b	Amplitude de l'intervalle $b-a$	Centre de l'intervalle $c=\dfrac{a+b}{2}$	Image du centre $f(c)$	Test : $f(c)<3$?	Encadrement de α
0	1	1	0,5			

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 et T la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
Déterminer l'abscisse du point B en lequel T recoupe à $\mathcal{C}$.

………

………

………

………

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ puis déterminer la (ou les) valeur(s) d'annulation de f'.
Faire ensuite un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f'(x) = $ .... (un seul résultat)

f' s'annule en ………. .

Compléter la phrase :

Le minimum global de f sur $[0\,;+\infty[$ est égal à ……… et il est atteint en ……….

III. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x+\sqrt{4-x^2}$ définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-2\,;2[$.

$\forall x \in]-2\,;2[\quad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

2°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-\sqrt{2}$.

……… (une seule réponse sans égalité)

IV. (1 point)

On considère les fonctions $f : x \mapsto 1-2x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.
Déterminer l'expression de $(f \circ g)(x)$ en fonction de x pour $x \in [-1\,;1]$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

V. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

Les cinq questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) L'affirmation « Pour tout réel x, $\mathrm{E}(-x) = -\mathrm{E}(x)$ » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left[\mathrm{E}(x)\right]^2 = 1$.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

3°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \pi$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \times \mathrm{E}(u_n)$ pour tout entier naturel n.
Calculer u_2.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

4°) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel où la variable x est un réel.

Entrée :
Saisir x

Traitement :
Tantque $x \geqslant 1$ **Faire**
    x prend la valeur $x-1$
FinTantque

Sortie :
Afficher x

Quel est le résultat affiché en sortie pour la valeur 4,01 en entrée ?

……………… (une seule réponse sans égalité)

Quel résultat obtient-on pour $x \geqslant 0$ quelconque ?

……………… (une seule réponse sans égalité)

5°) Déterminer la valeur de $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x>1$.

Indication : Déterminer le meilleur encadrement de $\dfrac{1}{x}$ pour $x>1$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

VI. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2018.
Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

1°) Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (u_n) où u_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2018+n$. On a donc $u_0=12$.

• Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

• Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ? Justifier en utilisant la calculatrice.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2°) Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (v_n) définie par $v_0=12$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=av_n\left(1-\dfrac{v_n}{b}\right)$ avec $a=1{,}1$ et $b=605$.

• Le but de cette question est de déterminer le sens de variation de (v_n).

Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1}-v_n=\dfrac{v_n(60{,}5-1{,}1v_n)}{605}$ puis que $v_{n+1}-v_n=\dfrac{1{,}1v_n(55-v_n)}{605}$.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

On admet que pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 55$. En déduire le sens de variation de (v_n).

• À l'aide de la calculatrice, dire si ce modèle semble répondre aux contraintes du milieu.

VII. (2 points)

On note z_1 et z_2 les racines complexes de l'équation $z^2 - 2\sqrt{3} + 4 = 0$ (E).
Calculer $z_1^{2019} + z_2^{2019}$.

Corrigé du contrôle du 4-11-2019

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto 3x^4 + 4x^3 + 2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ puis déterminer la (ou les) valeur(s) d'annulation de f'.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 12x^2(x+1) \quad \text{(un seul résultat sous forme factorisée)}$$

f' s'annule en 0 et en – 1.

Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de x^2		+		+	0	+	
Signe de $x+1$		–	0	+		+	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	0	+	
Variations de *f*		↘	1	↗	2	↗	

2°) Démontrer que l'équation $f(x) = 3 \quad (\text{E})$ admet une unique solution dans l'intervalle $I = [0\,;1]$.

C_1 : *f* est une fonction polynôme donc *f* est continue sur $\mathbb{R}$ et par restriction sur *I*.

C_2 : $f(0) = 2$ et $f(1) = 9$

0 est compris entre 2 et 9 (autrement dit 0 est une « valeur intermédiaire »).

C_3 : *f* est strictement croissante sur *I*.

f vérifie les conditions C_1, C_2, C_3 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution dans *I*.

Les conditions C_1 et C_2 assurent l'existence d'une solution ; la condition C_3 assure l'unicité.

On note α la solution de (E). Appliquer quatre fois « à la main » en détaillant les étapes la méthode de dichotomie pour obtenir des encadrements de α en complétant le tableau suivant.

On écrira les valeurs sous forme décimale (et non sous forme fractionnaire) en donnant des troncature au millième pour les valeurs de $f(c)$. Dans la colonne de test, on se contentera d'écrire V (vrai) ou F (faux).

a	b	Amplitude de l'intervalle $b-a$	Centre de l'intervalle $c = \frac{a+b}{2}$	Image du centre $f(c)$	Test : $f(c) < 3$?	Encadrement de α
0	1	1	0,5	2,6875	oui	$0{,}5 < \alpha < 1$
0,5	1	0,5	0,75	4,63	non	$0{,}5 < \alpha < 0{,}75$
0,5		0,25	0,625	4,434	non	$0{,}5 < \alpha < 0{,}5625$
0,5		0,125	0,5625	3,0123	non	$0{,}5 < \alpha < 0{,}6525$

On peut vérifier que l'encadrement est en accord avec la valeur approchée fournie par la calculatrice (résolution des équations polynomiales) : $\alpha = 0{,}560425...$.

3°) On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 et *T* la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Déterminer l'abscisse du point B en lequel *T* recoupe à $\mathcal{C}$.

Comme $f'(0) = 0$, la tangente *T* est horizontale et a pour équation $y = 2$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *T* sont les solutions de l'équation $3x^4 + 4x^3 + 2 = 2 \quad (1)$.

$$(1) \Leftrightarrow 3x^4 + 4x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3(3x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 = 0 \text{ ou } 3x+4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{4}{3}$$

T recoupe donc $\mathcal{C}$ au point B d'abscisse $-\frac{4}{3}$.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{x}$ définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ puis déterminer la (ou les) valeur(s) d'annulation de f'.

Faire ensuite un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

$$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{(un seul résultat)}$$

f' s'annule en $\frac{1}{4}$.

On résout l'équation $f'(x)=0$ (1) dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

$$(1) \Leftrightarrow 1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=0$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

$$\forall x \in \,]0\,;+\infty[\quad f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{(un seul résultat)}$$

f' s'annule en $\frac{1}{4}$.

Pour étudier le signe de $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, on travaille avec la forme $f'(x)=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$.

Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2\sqrt{x}-1$ puisque $2\sqrt{x}$ est toujours strictement positif.

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
Signe de $2\sqrt{x}-1$		$-$	0	$+$	
Signe de $2\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

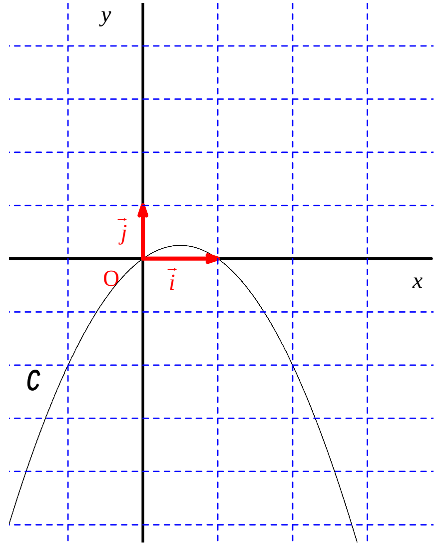
Compléter la phrase :

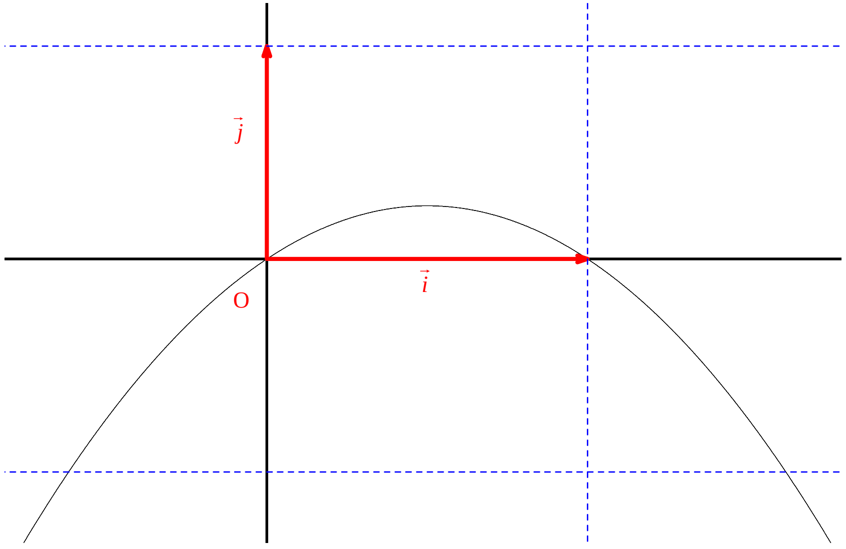
Le minimum global de f sur $[0\,;+\infty[$ est égal à $-\frac{1}{4}$ et il est atteint en $\frac{1}{4}$.

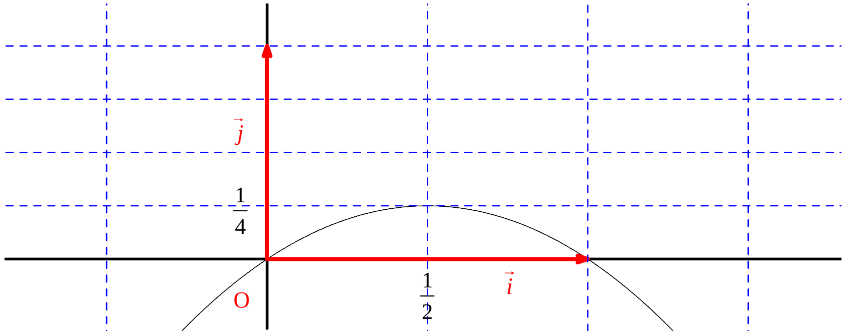
On vérifie ce résultat en traçant la courbe de la fonction f sur l'écran de la calculatrice au besoin en faisant des zooms.

On peut utiliser la calculatrice en effectuant des zooms successifs pour visualiser le maximum.

On peut également utiliser la commande de la calculatrice permettant de déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction sur un intervalle.







III.

On considère la fonction $f : x \mapsto x+\sqrt{4-x^2}$ définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]-2\,;2[$.

$$\forall x \in]-2\,;2[\quad f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \text{(un seul résultat)}$$

La formule à l'état brut donne $\forall x \in]-2\,;2[\quad f'(x)=1+\frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{4-x^2}}$.

On ne cherche pas à enlever la racine carrée présente au dénominateur.

2°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-\sqrt{2}$.

2 (une seule réponse sans égalité)

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $-\sqrt{2}$ est égal au nombre dérivé de *f* en $-\sqrt{2}$..

$$f'(-\sqrt{2})=1-\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{4-(-\sqrt{2})^2}}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$=2$$

On vérifie le résultat en utilisant la commande de la calculatrice permettant de calculer un nombre dérivé.

IV.

On considère les fonctions $f : x \mapsto 1-2x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

Déterminer l'expression de $(f \circ g)(x)$ en fonction de x pour $x \in [-1\,;1]$.

$f \circ g$ désigne la composée de g suivie de f.

$\forall x \in [-1\,;1] \quad (f \circ g)(x) = f(X)$ avec $X = g(x)$

$$=1-2X^2$$

$$=1-2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

$$=1-2\left(1-x^2\right)$$

$$=2x^2-1$$

On peut aussi écrire à la deuxième ligne $(f \circ g)(x) = f\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

V.

Les cinq questions sont indépendantes les unes des autres.

1°) L'affirmation « Pour tout réel x, $\mathrm{E}(-x)=-\mathrm{E}(x)$ » est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

Cette affirmation est fausse.

On prend un contre-exemple.

Pour $x=2{,}5$, on a $\mathrm{E}(-2{,}5)=-3$ et $\mathrm{E}(2{,}5)=2$.

La relation $\mathrm{E}(-x)=-\mathrm{E}(x)$ est vraie lorsque $x \in \mathbb{Z}$. On peut démontrer qu'elle n'est vraie que dans ce cas.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left[\mathrm{E}(x)\right]^2=1$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\left[\mathrm{E}(x)\right]^2=1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{E}(x)=1$ ou $\mathrm{E}(x)=-1$

$\Leftrightarrow 1 \leqslant x < 2$ ou $-2 \leqslant x < -1$

L'ensemble des solutions de (1) est $S=[1\,;2[\,\cup\,[-2\,;-1[$.

3°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=\pi$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=u_n \times \mathrm{E}(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Calculer u_2.

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 \times \mathrm{E}(u_0) \\ &= \pi \times 3 \\ &= 3\pi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2 &= u_1 \times \mathrm{E}(u_1) \\ &= 3\pi \times 9 \\ &= 27\pi \end{aligned}$$

4°) On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel où la variable *x* est un réel.

```
Entrée :
Saisir x

Traitement :
Tantque x ⩾ 1 Faire
        x prend la valeur x − 1
FinTantque

Sortie :
Afficher x
```

Quel est le résultat affiché en sortie pour la valeur 4,01 en entrée ?

0,01 (une seule réponse sans égalité)

Quel résultat obtient-on pour $x \geqslant 0$ quelconque ?

$x - \mathrm{E}(x)$ (une seule réponse sans égalité)

On obtient la partie décimale ou partie fractionnaire de *x*.

5°) Déterminer la valeur de $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour $x > 1$.

Indication : Déterminer le meilleur encadrement de $\dfrac{1}{x}$ pour $x > 1$.

Pour $x > 1$, on a $0 < \dfrac{1}{x} < 1$.

A fortiori, on a donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x} < 1$.

On en déduit que la partie entière de $\dfrac{1}{x}$ est égale à 0 soit $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

VI.

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve.
Cette population est estimée à 12 000 individus en 2018.
Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

1°) Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (u_n) où u_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2018 + n$. On a donc $u_0 = 12$.

● Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

1ère méthode :

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 5 % est égal à 1,05.

On a : $u_{n+1} = 1,05u_n$.
On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

2e méthode :

$u_{n+1} = u_n + \dfrac{5}{100}u_n = 1,05u_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,05.

● Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ? Justifier en utilisant la calculatrice.

On sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 12 \times 1,05^n$.
On rentre la suite dans la calculatrice (on peut éventuellement rentrer la fonction $f : x \mapsto 12 \times 1,05^x$).
La calculatrice donne $u_{33} = 60,0382...$.
Le modèle répond aux contraintes durant une durée limitée.
Le modèle est valable pendant les 32 premières années.

2°) Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (v_n) définie par $v_0 = 12$ et, pour tout entier naturel *n*, $v_{n+1} = av_n\left(1 - \dfrac{v_n}{b}\right)$ avec $a = 1,1$ et $b = 605$.

● Le but de cette question est de déterminer le sens de variation de (v_n).

Démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{v_n(60,5 - 1,1v_n)}{605}$ puis que $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1,1v_n(55 - v_n)}{605}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n = a v_n \left(1 - \frac{v_n}{b}\right) - v_n$$

$$= v_n \left[a\left(1 - \frac{v_n}{b}\right) - 1 \right]$$

$$= v_n \left(a - \frac{a v_n}{b} - 1 \right)$$

$$= v_n \frac{ab - a v_n - b}{b}$$

$$= v_n \frac{60{,}5 - 1{,}1 v_n}{605}$$

$$= v_n \frac{1{,}1\left(55 - v_n\right)}{605}$$

$$= \frac{1{,}1 v_n \left(55 - v_n\right)}{605}$$

On admet que pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 55$. En déduire le sens de variation de $\left(v_n\right)$.

On analyse le signe du quotient.

La condition $v_n < 55$ entraîne $55 - v_n > 0$.

Or $v_n > 0$.

L'expression de $v_{n+1} - v_n$ trouvée précédemment permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} - v_n > 0$.

La suite $\left(v_n\right)$ est donc strictement croissante.

● À l'aide de la calculatrice, dire si ce modèle semble répondre aux contraintes du milieu.

D'après la calculatrice, la suite $\left(v_n\right)$ semble tendre vers 55. Elle correspond bien aux contraintes du milieu.

VII.

On note z_1 et z_2 les racines complexes de l'équation $z^2 - 2\sqrt{3} + 4 = 0 \;\; (\mathrm{E})$.
Calculer $z_1^{2019} + z_2^{2019}$.

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow z^2 = 2\sqrt{3} - 4$ (on reconnaît une équation de la forme $z^2 = a$ avec a réel strictement négatif)

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ ou $z = -\mathrm{i}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ (car $2\sqrt{3} - 4 < 0$)

$\Leftrightarrow z = \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ ou $z = -\mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

La simplification de $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ en $\sqrt{3} - 1$ s'obtient soit en utilisant la calculatrice soit en observant que $4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$.

Cette simplification est facultative. L'important est d'observer que l'on a deux solutions complexes imaginaires pures et opposées.
Les solutions de (E) sont $z_1 = \mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$ et $z_2 = -\mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)$.

1ère méthode :

$$z_1^{2019} + z_2^{2019} = z_1^{2019} + \left(-z_1\right)^{2019}$$

$$= z_1^{2019} - z_1^{2019}$$

$$= 0$$

2e méthode :

$$z_1^{2019} + z_2^{2019} = \left[\mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)\right]^{2019} + \left[-\mathrm{i}\left(\sqrt{3} - 1\right)\right]^{2019}$$

$$= 0$$