$1^{\text{ère}}$ 6 spécialité

Contrôle du vendredi 18 octobre 2019 (50 minutes)

À disposition :
- calculatrice ;
- fiche préparatoire.

Numéro : …..

Prénom et nom : ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère l'expression $\text{A}=\left(3x-1\right)^2-4\left(x+1\right)^2$ avec $x\in\mathbb{R}$.

1°) Développer et réduire A.

2°) Factoriser A à partir de la forme de base.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

II. (3 points)

Dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O},\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère une parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y=ax^2+bx+c$, où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$.

Compléter les phrases suivantes sans explication.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe $(\text{O}x)$ sont solutions de l'équation ……………………………

La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe $(\text{O}y)$ au point $\text{A}\left(\ldots;\ldots\right)$.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point O si et seulement si $c=\ldots\ldots$.

III. (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 3\quad(1)$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x\mapsto -x^2+4x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Former sans explication le tableau de variations de f.

On utilisera la règle pour tracer les flèches de variations et l'on n'oubliera pas d'écrire la valeur de l'extremum calculé préalablement au brouillon.

Compléter les phrases suivantes décrivant les variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est ……………………………………………… sur l'intervalle …………………… .

La fonction f est ……………………………………………… sur l'intervalle …………………… .

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Tracer $\mathscr{C}$ avec soin sur le graphique donné en annexe.

2°) Sur le graphique précédent, tracer la droite D d'équation $y = x - 1$.
Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

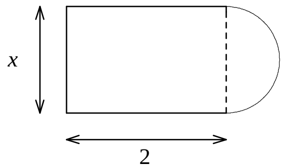
V. (1 point)

On considère un rectangle dont le ratio longueur : largeur est égal à 3 : 2. On note x sa largeur en cm.
Exprimer son aire $\mathscr{A}$ en cm^2 en fonction de x.

………………………………… (une seule égalité)

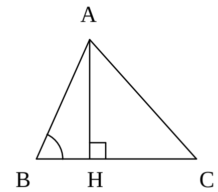
VI. (2 points)

Exprimer en fonction de x le périmètre $\mathscr{P}$ et l'aire $\mathscr{A}$ de la figure ci-dessous constituée d'un rectangle et d'un demi-disque accolé.



VII. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la figure ci-dessous. On donne $\mathrm{AC} = \mathrm{BC} = 3$ et $\mathrm{BH} = 1$.



Ne rien écrire sur cette figure.

1°) Calculer AH (valeur exacte). Répondre à gauche.
2°) Déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$. Répondre à droite.

………….. (une seule égalité) ………….. (une réponse sans égalité)

VIII. (1 point)

On considère la fonction **image** écrite ci-dessous en langage naturel dans le cadre de gauche dont le script correspondant en langage Python est donné dans le cadre de droite. On précise que la variable n est un entier relatif.

Fonction image(n)
  Si n est divisible par 5
    Alors m prend la valeur $\frac{n}{5}$
    Sinon
    m prend la valeur 0
  FinSi
  Renvoyer m

```
def image(n) :
   if n%5 = = 0 :
      m = n / 5
   else :
      m=0
   return m
```

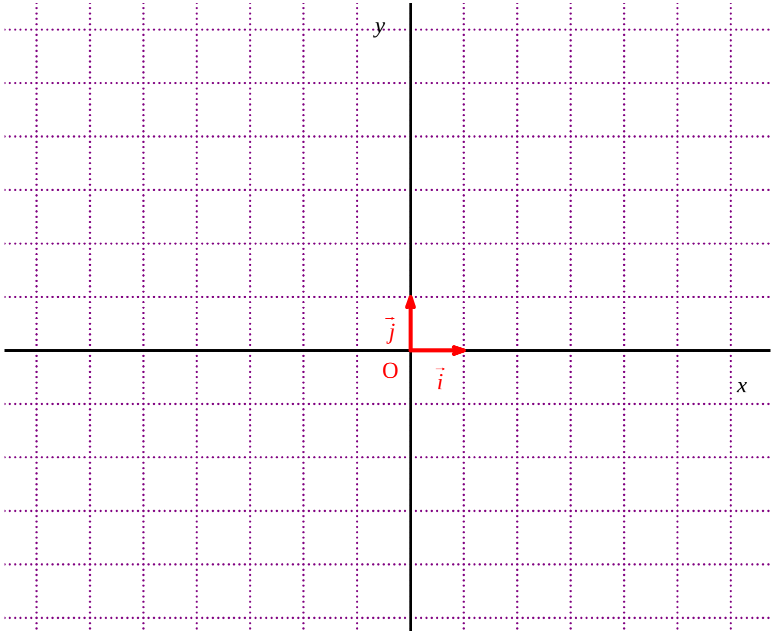
Quelles sont les valeurs renvoyées par la fonction **image** lorsque

- $n = 25$? ……
- $n = 2019$? ……

Écrire une seule réponse dans chaque cas, sans égalité.

Annexe exercice IV.

Numéro : …..	**Prénom et nom :** …………………….………………………….



Corrigé du contrôle du 19-10-2019

I.

On considère l'expression $\text{A}=(3x-1)^2-4(x+1)^2$ avec $x\in\mathbb{R}$.

1°) Développer et réduire A.

2°) Factoriser A à partir de la forme de base.

1°)

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \text{A}=9x^2-6x+1-4(x^2+2x+1)$

$=9x^2-6x+1-4x^2-8x-4$

$=5x^2-14x-3$

2°)

$\forall x\in\mathbb{R}\quad \text{A}=(3x-1)^2-[2(x+1)]^2$ (phase de réécriture de l'expression de base fondamentale)

$=[(3x-1)+2(x+1)][(3x-1)-2(x+1)]$ (identité remarquable)

$=(5x+1)(x-3)$

II.

Dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère une parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y=ax^2+bx+c$, où a, b, c sont trois réels tels que $a\neq 0$.

Compléter les phrases suivantes sans explication.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe $(\text{O}x)$ sont solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe $(\text{O}y)$ au point $\text{A}(0\,;c)$.

Justification :

$y_{\text{A}}=a\times 0^2+b\times 0+c=c$.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point O si et seulement si $c=0$.

Justification :

$\text{O}\in\mathscr{C}$ si et seulement si $a\times 0^2+b\times 0+c=0$

si et seulement si $c=0$

III.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 3$ (1).

On résout l'inéquation dans $\mathbb{R}^*$.

(1) est successivement équivalente à :

$$\frac{x^2+1}{x}\geqslant 3$$

$$\frac{x^2+1}{x}-3\geqslant 0$$ (on garde le dénominateur ; surtout pas de « produit en croix »)

$$\frac{x^2+1-3x}{x}\geqslant 0$$

$$\frac{x^2-3x+1}{x}\geqslant 0$$

On considère le polynôme x^2-3x+1.

Son discriminant est égal à 5. Comme il est strictement positif, le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ (on vérifie ces valeurs grâce à la calculatrice).

On dresse ensuite un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de x^2-3x+1		+	|	+	0 num	–	0 num	+	
Signe de x		–	0 dén	+	|	+	|	+	
Signe de $\dfrac{x^2-3x+1}{x}$		–	||	+	0 num	–	0 num	+	

L'ensemble des solutions de (1) est donc $S_1=\left]0\,;x_1\right]\cup\left[x_2\,;+\infty\right[$.

On effectue tous les tests possibles (graphiquement et valeurs tests).

IV.

On considère la fonction $f:x\mapsto -x^2+4x+1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Former sans explication le tableau de variations de *f*.
On utilisera la règle pour tracer les flèches de variations et l'on n'oubliera pas d'écrire la valeur de l'extremum calculé préalablement au brouillon.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	5	$\searrow$	

Compléter les phrases suivantes décrivant les variations de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;2\right]$.

La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[2\,;+\infty\right[$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.
Tracer $\mathscr{C}$ avec soin sur le graphique donné en annexe.

Tracé de $\mathscr{C}$:

La courbe $\mathscr{C}$ est une parabole de sommet $\mathrm{S}(2\,;5)$.

On fait un petit tableau de valeurs de manière à trouver des points à coordonnées entières.

x	0	1	2	3	4
y	1	4	5	4	1

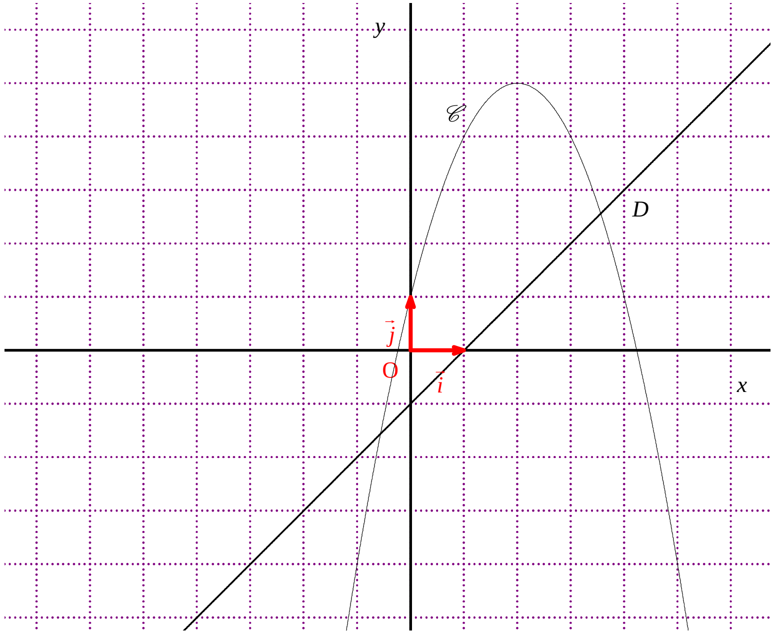
On relie ensuite ces points à la main le plus harmonieusement possible en se rappelant que la parabole doit être bien arrondie au niveau du sommet.

Tracé de D :

On cherche deux points à coordonnées entières.

x	0	4
y	-1	3

On peut aussi utiliser l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur.



2°) Sur le graphique précédent, tracer la droite D d'équation $y = x - 1$.
Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.

$\mathscr{C}$ a pour équation $y = -x^2 + 4x + 1$ et D a pour équation $y = x - 1$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D sont les solutions de l'équation $f(x) = x - 1 \quad (1)$.

On dit que (1) est l'*équation aux abscisses* des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D.

(1) est successivement équivalente à :

$-x^2 + 4x + 1 = x - 1$

$-x^2 + 3x + 2 = 0$

On peut aussi passer à $x^2 - 3x - 2 = 0$ qui présente l'avantage d'avoir un coefficient positif devant le x^2.

On considère le polynôme $-x^2 + 3x + 2 = 0$.

Son discriminant est égal à 17. Comme il est strictement positif, le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{-2} = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{-2} = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ (on vérifie ces valeurs grâce à la calculatrice).

Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ et D sont donc $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

On ne demande pas de calculer les ordonnées des deux points.

V.

On considère un rectangle dont le ratio longueur : largeur est égal à 3 : 2. On note x sa largeur en cm.
Exprimer son aire $\mathscr{A}$ en cm^2 en fonction de x.

$$\mathscr{A} = \frac{3x^2}{2}\ \text{cm}^2 \quad \text{(une seule égalité)}$$

On sait que $\mathscr{A} = \text{longueur} \times \text{largeur}$.

Par ailleurs, d'après les information de l'énoncé, $\text{largeur} = x$ cm et $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \dfrac{3}{2}$.

On a donc $\text{longueur} = \dfrac{3}{2} \times \text{largeur}$ d'où $\text{longueur} = \dfrac{3}{2} \times x$ cm que l'on peut encore écrire sous la forme $\text{longueur} = \dfrac{3x}{2}$ cm.

$$\mathscr{A} = \left(\frac{3x}{2}\ \text{cm}\right) \times (x\ \text{cm})$$

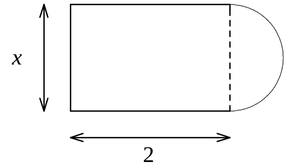
$$= \left(\frac{3x}{2} \times x\right)\ \text{cm}^2$$

$$= \frac{3x^2}{2}\ \text{cm}^2$$

On contrôle les dimensions (au sens physique) sachant que x est une longueur.

VI.

Exprimer en fonction de x le périmètre $\mathscr{P}$ et l'aire $\mathscr{A}$ de la figure ci-dessous constituée d'un rectangle et d'un demi-disque accolé.



On écrit une seule expression.

On doit bien faire attention que le diamètre du demi-disque est égal à x et que son rayon est donc égal à $\dfrac{x}{2}$.

$$\mathscr{P} = 2\times 2 + x + \underbrace{\frac{\pi\times x}{2}}_{\text{la moitié du périmètre d'un disque de diamètre } x}$$

$$= 4 + x + \frac{\pi x}{2}$$

On peut éventuellement écrire $\mathscr{P} = 4 + x\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$.

[$\mathscr{A}$ = aire d'un rectangle de dimensions 2 et x + aire d'un demi-disque de rayon $\frac{x}{2}$]

$$\mathscr{A} = 2x + \frac{\pi\times\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$$

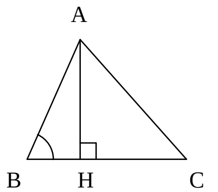
$$= 2x + \frac{\pi\times\frac{x^2}{4}}{2}$$

$$= 2x + \frac{\pi x^2}{8}$$

On ne peut pas aller plus loin.

VII.

On considère la figure ci-dessous. On donne $AC = BC = 3$ et $BH = 1$.



Ne rien écrire sur cette figure.

1°) Calculer AH (valeur exacte). Répondre à gauche.

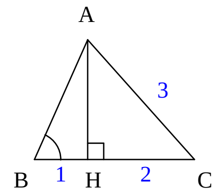
2°) Déterminer la valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$. Répondre à droite.

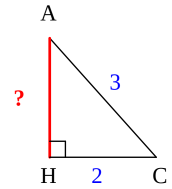
$\sqrt{5}$ (une seule égalité)

65,9 (une réponse sans égalité)

1°) Pour déterminer la valeur exacte de AH, on se place dans le triangle ACH rectangle en H et on applique le théorème de Pythagore.

On utilise $BC = 3$ et $BH = 1$. On en déduit que $CH = 2$.

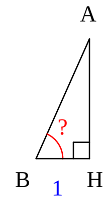




On a $AH^2 = AC^2 - CH^2 = 9 - 4 = 5$ d'où $AH = \sqrt{5}$.

2°) Il faut bien penser que l'angle $\widehat{ABC}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{ABH}$ (les deux angles sont confondus).

On se place donc dans le triangle ABH rectangle en H



On a $\tan\widehat{ABH} = \frac{AH}{BH}$ soit $\tan\widehat{ABH} = \frac{\sqrt{5}}{1}$ ce qui donne finalement.

On en déduit que $\tan\widehat{ABH} = \sqrt{5}$.

On utilise ensuite la calculatrice en mode degré.

$\widehat{ABH} = 65{,}9051574...\ °$

La valeur arrondie au dixième de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ est donc 65,9.

VIII.

On considère la fonction **image** écrite ci-dessous en langage naturel dans le cadre de gauche dont le script correspondant en langage Python est donné dans le cadre de droite. On précise que la variable n est un entier relatif.

Fonction image(n) **Si** n est divisible par 5 Alors m prend la valeur $\frac{n}{5}$ **Sinon** m prend la valeur 0 **FinSi** Renvoyer m	def **image**(n) : if n%5 == 0: m = n / 5 else : m = 0 return m

Quelles sont les valeurs renvoyées par la fonction **image** lorsque

- $n = 25$? 5
- $n = 2019$? 0

Écrire une seule réponse dans chaque cas, sans égalité.

25 est divisible par 5 ; 2019 n'est pas divisible par 5.