TS1 spécialité

Devoir pour le jeudi 7 novembre 2019

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple.

I. Déterminer les couples $(x,\ y)$ d'entiers naturels vérifiant $x^2 - y^2 = 2019 \quad (\text{E})$.

Vérifier en utilisant le site « dcode ».

On soignera la présentation et la rédaction.

II. Le but de l'exercice est de déterminer les triplets $(x,\ y,\ z)$ d'entiers naturels tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 2019$.

1°) Justifier que les triplets cherchés sont formés d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 44.

2°) Résoudre le problème à l'aide d'un programme sur calculatrice ou d'un programme Python.

Sur la copie, on attend :
- l'algorithme correspondant au programme rédigé en langage naturel ;
- la liste des triplets cherchés.

Vérifier à l'aide du site « dcode ».

Conseils

La présentation doit être la plus soignée possible.

Corrigé du devoir pour le 7-11-2019

I. Déterminer les couples $(x,\ y)$ d'entiers naturels vérifiant $x^2 - y^2 = 2019 \quad (\text{E})$.

Vérifier en utilisant le site « dcode ».

On soignera la présentation et la rédaction.

$(\text{E}) \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 2019 \ \ (\text{E}')$

Comme x et y sont des entiers naturels, $x+y$ est aussi un entier naturel donc positif ou nul.

L'égalité (E') montre immédiatement que $x-y$ est aussi positif.

De plus, $x+y \geqslant x-y$.

Il y a 2 manières d'écrire 2019 comme produit de deux entiers naturels : $2019 = 1 \times 2019 = 3 \times 673$ (décompositions qui font apparaître les paires de diviseurs associés positifs de 2019).

$$(\text{E}') \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2019 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x+y=673 \\ x-y=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1010 \\ y=1009 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=338 \\ y=335 \end{cases}$$ (résolution immédiate par addition et soustraction membre à membre)

Les couples cherchés sont donc $(1010\,;1009)$ et $(338\,;335)$.

II. Le but de l'exercice est de déterminer les triplets $(x,\ y,\ z)$ d'entiers naturels tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 2019$.

1°) Justifier que les triplets cherchés sont formés d'entiers naturels inférieurs ou égaux à 44.

Soit $(x,\ y,\ z)$ un triplet d'entiers naturels tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 2019$.

On a $x^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2$ soit $x^2 \leqslant 2019$.

Comme x est un entier naturel, $x \leqslant \sqrt{2019}$.

Or la calculatrice donne $\sqrt{2019} = 44{,}933283...$ donc $x \leqslant 44$.

Le raisonnement s'applique de la même manière pour y et z.

On en déduit que x, y, z sont inférieurs ou égaux à 44.

2°) Résoudre le problème à l’aide d’un programme sur calculatrice ou d’un programme Python.

Sur la copie, on attend :
- l’algorithme correspondant au programme rédigé en langage naturel ;
- la liste des triplets cherchés.

Vérifier à l’aide du site « dcode ».

On utilise trois boucles « Pour » imbriquées les unes dans les autres.

Traitement et sortie :
Pour x allant de 0 à 44 **Faire**
    Pour y allant de 0 à 44 **Faire**
        Pour z allant de 0 à 44 **Faire**
            S prend la valeur $x^2+y^2+z^2$
            Si $S=2019$
                Alors afficher x, y, z
            FinSi
        FinPour
    FinPour
FinPour

On obtient les cinq sortes de triplets :
- les triplets formés des nombres 1, 13, 43 ;
- les triplets formés des nombres 5, 25, 37 ;
- les triplets formés des nombres 7, 17, 41 ;
- les triplets formés des nombres 11, 23, 37 ;
- les triplets formés des nombres 13, 25, 35 ;
- les triplets formés des nombres 17, 19, 37 ;
- les triplets formés des nombres 23, 23, 31.

Les triplets cherchés sont :

$(1;13;43)$, $(1;43;13)$, $(13;1;43)$, $(13;43;1)$, $(43;1;13)$, $(43;13;1)$, $(5;25;37)$, $(5;37;25)$, $(25;5;37)$, $(25;37;5)$, $(37;5;25)$, $(37;25;5)$, $(7;11;43)$, $(7;43;11)$, $(11;7;43)$, $(11;43;7)$, $(43;7;11)$, $(43;11;7)$, $(7;17;41)$, $(7;41;17)$, $(17;7;41)$, $(17;41;7)$, $(41;7;17)$, $(41;17;7)$, $(11;23;37)$, $(11;37;23)$, $(23;11;37)$, $(23;37;11)$, $(37;11;23)$, $(37;23;11)$, $(13;13;41)$, $(13;41;13)$, $(41;13;13)$, $(13;25;35)$, $(13;35;25)$, $(25;13;35)$, $(25;35;13)$, $(35;13;25)$, $(35;25;13)$, $(17;19;37)$, $(17;37;19)$, $(19;17;37)$, $(19;37;17)$, $(37;17;19)$, $(37;19;17)$, $(23;23;31)$, $(23;31;23)$,$(31;23;23)$.