1ère 6
spécialité

Contrôle du vendredi 27 septembre 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : …………………………..…………

Note : ….. / 20

I. Question de cours (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Soit a, b, c trois réels tels que a soit non nul. On considère le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $x\in\mathbb{R}$.
On suppose que le discriminant de $P(x)$ est strictement positif et on note alors x_1 et x_2 ses racines dans $\mathbb{R}$.

1°) Rappeler les formules donnant la somme et le produit de x_1 et x_2 en fonction de a, b, c.

………...

2°) On suppose que $x_1<x_2$. Rappeler le tableau de signes de $P(x)$.

II. (3 points)

On considère les polynômes $P_1(x)=x^2-3x-1$, $P_2(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)x^2+x+\sqrt{2}+1$, $P_3(x)=3x^2+4x-5$.
Calculer les discriminants de $P_1(x)$ et de $P_2(x)$ notés respectivement Δ_1 et Δ_2.
Calculer le discriminant réduit de $P_3(x)$ noté Δ'_3.

………...

………

………

………

………

………

………

III. (3 points)

On considère la fonction $f: x\mapsto -3x^2+2x+1$.

Calculer les nombres $a=f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ et $b=f\left(\sqrt{2}\right)$.

Déterminer $|b|$ en justifiant avec soin.

………

………

………

………

………

………

………

IV. (1 point)

Le polynôme $P(x)=3x^2-5x+1$ admet-il des racines dans $\mathbb{R}$? Si oui, déterminer leurs valeurs exactes.
On attend une réponse complètement rédigée en faisant attention à la précision des notations et du vocabulaire utilisé.

………

………

………

………

………

………

………

V. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans toutes les expressions, x désigne un réel quelconque.

1°) Développer les expressions $A=(2x+1)^2-(x-1)^2$, $B=5-(3x-1)(x+1)$ et $C=2x^2(x+1)-x(x^2-1)$.

2°) Écrire sous la forme d'un seul quotient l'expression $D=3-\frac{x-1}{x}$ (on suppose dans cette question que $x\neq 0$).

3°) Factoriser l'expression $E=25x^2-1$.

Compléter le tableau ci-dessous en écrivant chaque fois une seule égalité (calculs au brouillon).

Réponses du 1°)	
Réponse du 2°)	
Réponse du 3°)	

VI. (4 points)

Une unité de longueur est fixée dans le plan.

Soit ABCD un carré de côté $2a$ où a est un réel strictement positif. On note E et F les milieux respectifs de $[BC]$ et $[CD]$.

Exprimer en fonction de a l'aire $\mathscr{A}$ et le périmètre $\mathscr{P}$ du pentagone ABEFD.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VII. (1 point)

Soit EFG un triangle rectangle en F tel que $EF=4$ cm et $\widehat{FEG}=38°$. On note x la longueur EG en cm.

Faire la figure dans l'espace ci-dessous.

Calculer x (valeur exacte).

……………………………… (une seule <u>égalité</u>)

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au dixième de x.

………………… (une seule réponse <u>sans égalité</u>)

Corrigé du contrôle du 27-9-2019

I. Question de cours

Soit a, b, c trois réels tels que a soit non nul. On considère le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ avec $x\in\mathbb{R}$.

On suppose que le discriminant de $P(x)$ est strictement positif et on note alors x_1 et x_2 ses racines dans $\mathbb{R}$.

1°) Rappeler les formules donnant la somme et le produit de x_1 et x_2 en fonction de a, b, c.

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ ;\ x_1x_2=\frac{c}{a}$$

2°) On suppose que $x_1<x_2$. Rappeler le tableau de signes de $P(x)$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
SGN de $P(x)$		SGN de a	0	SGN contraire de a	0	SGN de a	

II.

On considère les polynômes $P_1(x)=x^2-3x-1$, $P_2(x)=\left(\sqrt{2}-1\right)x^2+x+\sqrt{2}+1$, $P_3(x)=3x^2+4x-5$.

Calculer les discriminants de $P_1(x)$ et de $P_2(x)$ notés respectivement Δ_1 et Δ_2.

Calculer le discriminant réduit de $P_3(x)$ noté Δ'_3.

On applique les formules directement en situation sans introduire de lettres supplémentaires.

$\Delta_1=(-3)^2-4\times1\times(-1)$ (parenthèses obligatoires autour du – 1 !!!)

$=9+4$

$=13$

$\Delta_2=1^2-4\times\left(\sqrt{2}-1\right)\times\left(\sqrt{2}+1\right)$

$=1-4\times\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2\right)$ (identité remarquable)

$=1-4\times(2-1)$

$=1-4\times1$

$=-3$

$\Delta'_3=2^2-3\times(-5)$

$=4+15$

$=19$

III.

On considère la fonction $f:x\mapsto -3x^2+2x+1$.

Calculer les nombres $a=f\left(\frac{2}{3}\right)$ et $b=f\left(\sqrt{2}\right)$.

Déterminer $|b|$ en justifiant avec soin.

$a=f\left(\frac{2}{3}\right)$

$=-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\times\frac{2}{3}+1$

$=-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+1$

$=1$

$b=f\left(\sqrt{2}\right)$

$=-3\times\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}+1$

$=2\sqrt{2}-5$

$2\sqrt{2}-5<0$ donc $|b|=5-2\sqrt{2}$ (résultat que l'on vérifie à l'aide de la calculatrice).

IV.

Le polynôme $P(x)=3x^2-5x+1$ admet-il des racines dans $\mathbb{R}$? Si oui, déterminer leurs valeurs exactes.

On attend une réponse complètement rédigée en faisant attention à la précision des notations et du vocabulaire utilisé.

$P(x)$ est un polynôme du second degré complet. On ne trouve aucune racine évidente.

On calcule le discriminant Δ.

$\Delta=(-5)^2-4\times3\times1$

$=13$

On a $\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\frac{5-\sqrt{13}}{6}$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{13}}{6}$.

V.

Dans toutes les expressions, x désigne un réel quelconque.

1°) Développer les expressions $\mathrm{A}=(2x+1)^2-(x-1)^2$, $\mathrm{B}=5-(3x-1)(x+1)$ et $\mathrm{C}=2x^2(x+1)-x\left(x^2-1\right)$.

2°) Écrire sous la forme d'un seul quotient l'expression $\mathrm{D}=3-\frac{x-1}{x}$ (on suppose dans cette question que $x\neq0$).

3°) Factoriser l'expression $\mathrm{E}=25x^2-1$.

Compléter le tableau ci-dessous en écrivant chaque fois une seule égalité (calculs au brouillon).

Réponses du 1°)	$\text{A}=3x^2+6x$
	$\text{B}=-3x^2-2x+6$
	$\text{C}=x^3+2x^2+x$
Réponse du 2°)	$\text{D}=\dfrac{2x+1}{x}$
Réponse du 3°)	$\text{E}=(5x-1)(5x+1)$

1°)

$\text{A}=\left(4x^2+4x+1\right)-\left(x^2-2x+1\right)$

$=3x^2+6x$

$\text{B}=5-\left(3x^2+3x-x-1\right)$

$=5-\left(3x^2+2x-1\right)$ (réduction à l'intérieur de la parenthèse)

$=-3x^2-2x+6$

$\text{C}=2x^3+2x-x^3+x$

$=x^3+2x^2+x$

On obtient des expressions polynomiales de degré 2 ou 3.

On vérifie éventuellement en utilisant quelques valeurs tests simples.

2°)

$\text{D}=3-\dfrac{x-1}{x}$

$=\dfrac{3x-(x-1)}{x}$ (attention aux parenthèses)

$=\dfrac{2x+1}{x}$

On peut utiliser la valeur 1 pour x en guise de vérification.

3°)

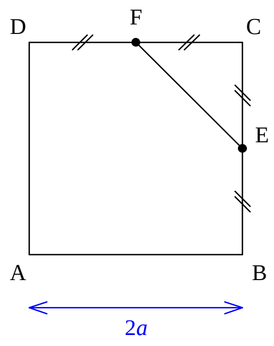
$\text{E}=(5x)^2-1^2$ (phase de réécriture importante)

$=(5x-1)(5x+1)$

VI.

Une unité de longueur est fixée dans le plan.
Soit ABCD un carré de côté $2a$ où a est un réel strictement positif. On note E et F les milieux respectifs de $[\text{BC}]$ et $[\text{CD}]$.
Exprimer en fonction de a l'aire $\mathscr{A}$ et le périmètre $\mathscr{P}$ du pentagone ABEFD.

On commence par faire une figure <u>codée</u> au brouillon <u>en respectant la disposition classique</u> des points A, B, C, D.



Par les milieux, on a immédiatement les longueurs AE, EB, BF, FC qui sont toutes égales à a (inutile de détailler le calcul).

$\mathscr{A}=\mathscr{A}_{\text{ABCD}}-\mathscr{A}_{\text{CEF}}$

$=4a^2-\dfrac{a^2}{2}$

$=4a^2-\dfrac{a^2}{2}$

$\mathscr{P}=\text{AB}+\text{BE}+\text{EF}+\text{FD}+\text{DA}$

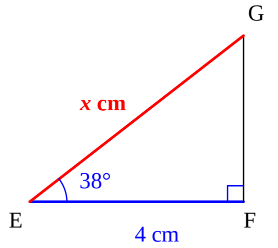
$=2a+a+a\sqrt{2}+a+2a$ (on utilise directement le fait que $\text{EF}=a\sqrt{2}$, hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur a qui correspond aussi à la longueur de la diagonale d'un carré de côté a).

$=a\left(6+\sqrt{2}\right)$

VII.

Soit EFG un triangle rectangle en F tel que $EF = 4\text{ cm}$ et $\widehat{FEG} = 38°$. On note x la longueur EG en cm.

Faire la figure dans l'espace ci-dessous.



Calculer x (valeur exacte).

$$x = \frac{4}{\cos 38°}$$ (une seule égalité)

À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au dixième de x.

5,1 (une seule réponse sans égalité)

Par hypothèse, le triangle EFG est rectangle en F.

$[EG]$ est l'hypoténuse.

Pour l'angle $\widehat{FEG}$, $[EF]$ est le côté adjacent.

On sait que $\cos \widehat{FEG} = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$ qui s'écrit ici $\cos \widehat{FEG} = \dfrac{EF}{EG}$ soit $\cos 38° = \dfrac{4\text{ cm}}{x\text{ cm}}$.

Par « produit en croix », on obtient alors $x \times \cos 38° = 4$ d'où $x = \dfrac{4}{\cos 38°}$.

La calculatrice (en mode degré) affiche 5,07607286 (affichage avec huit chiffres après la virgule).

Toutes les décimales sont exactes sauf peut-être la dernière qui dépend de la suivante. Elle est soit égale à 5 soit égale à 6 car la calculatrice donne toujours un résultat arrondi.

On écrit $x = 5{,}0760728...$ qui signifie que l'on a uniquement le début du développement décimal illimité et que tous les chiffres écrits après la virgule sont exacts.

La valeur arrondie au dixième de x est donc 5,1.