TS1

Contrôle du mercredi 25 septembre 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………………

Note : ……. / 20

Il est demandé que tous les traits de fractions soient faits à la règle.

I. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points)

On pose $z=(\mathrm{i}-4a)(a-\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i}a)^2$ où a est un nombre réel.

1°) Vérifier que z est imaginaire pur.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) Déterminer l'écriture algébrique de $\dfrac{1}{z}$ (on suppose que $a\neq 0$) et de $\dfrac{1}{z+1}$.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

3°) On pose $Z=2z^2+(1-\mathrm{i})\overline{z}$. Déterminer la forme algébrique de Z.
Déterminer la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) Z est imaginaire pur.
On donnera les réponses directement sur les deux lignes ci-dessous sans détailler les calculs et sans faire de phrase.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

Soit m un réel. On considère l'équation $(z-\mathrm{i})^2+(z+\mathrm{i})^2=m$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1°) Dans cette question, on choisit $m=-6$. Résoudre l'équation (E) dans ce cas.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2°) Dans cette question, on revient au cas où m est un réel quelconque.
Résoudre (E). On discutera suivant les valeurs de m.

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

III. (3 points)

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $z=(1+\mathrm{i})^{4n+2}\times\mathrm{i}$.
Démontrer que z est un réel. On présentera les calculs justificatifs avant de rédiger une phrase de conclusion.

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)

Soit λ un réel. On considère l'équation $z^2+\lambda z+3=0$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1°) Résoudre (E) pour $\lambda=-1$.

2°) Calculer le discriminant de (E) en fonction de λ.
Déterminer pour quelles valeurs de λ l'équation (E) admet deux solutions complexes distinctes conjuguées.

V. (2 points)

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$, on considère trois points A, B, C quelconques d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C}.
Soit D le point tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
Exprimer l'affixe z_{D} de D en fonction de z_{A}, z_{B}, z_{C}.

Corrigé du contrôle du 25-9-2019

I.

On pose $z=(\mathrm{i}-4a)(a-\mathrm{i})-(1+2\mathrm{i}a)^2$ où a est un nombre réel.

1°) Vérifier que z est imaginaire pur.

$z=(\mathrm{i}-4)(a-\mathrm{i})-(1+4\mathrm{i}a-4a^2)$

$=\mathrm{i}a+\cancel{1}\cancel{-4a^2}+\cancel{4\mathrm{i}a}-\cancel{1}-\cancel{4\mathrm{i}a}\cancel{+4a^2}$

$=\mathrm{i}a$

Comme a est un réel par hypothèse, z est imaginaire pur.

2°) Déterminer l'écriture algébrique de $\dfrac{1}{z}$ (on suppose que $a\neq 0$) et de $\dfrac{1}{z+1}$.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{\mathrm{i}a}=\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}a\times\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}}{a}$$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1+\mathrm{i}a}=\frac{1-\mathrm{i}a}{(1+\mathrm{i}a)\times(1-\mathrm{i}a)}=\frac{1-\mathrm{i}a}{1+a^2}$$

3°) On pose $Z=2z^2+(1-\mathrm{i})\overline{z}$. Déterminer la forme algébrique de Z.
Déterminer la (ou les) valeur(s) de a pour laquelle (lesquelles) Z est imaginaire pur.
On donnera les réponses directement sur les deux lignes ci-dessous sans détailler les calculs et sans faire de phrase.

$Z=2z^2+(1-\mathrm{i})\overline{z}$

$=2(\mathrm{i}a)^2+(1-\mathrm{i})\left(\overline{\mathrm{i}a}\right)$

$=2\times(-a^2)+(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i}a)$

$=-2a^2-\mathrm{i}a-a$

$=-2a^2-a-\mathrm{i}a$

Cette dernière égalité fait apparaître la forme algébrique de Z. On a $\operatorname{Re}Z=-2a^2-a$ et $\operatorname{Im}Z=-a$.

$Z\in\mathrm{i}\mathbb{R}\Leftrightarrow \operatorname{Re}Z=0$

$\Leftrightarrow -2a^2-a=0$

$\Leftrightarrow -a(2a+1)=0$

$\Leftrightarrow a=0$ et $a=-\dfrac{1}{2}$

II.

Soit m un réel. On considère l'équation $(z-\mathrm{i})^2+(z+\mathrm{i})^2=m$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1°) Dans cette question, on choisit $m=-6$. Résoudre l'équation (E) dans ce cas.

$(\mathrm{E})\Leftrightarrow z^2\cancel{-2\mathrm{i}}-1+z^2\cancel{+2\mathrm{i}}-1=-6$

$\Leftrightarrow 2z^2-2=-6$

$\Leftrightarrow z^2=-2$

$\Leftrightarrow z=\mathrm{i}\sqrt{2}$ ou $z=-\mathrm{i}\sqrt{2}$

Soit S l'ensemble des solutions de (E) pour $m=-6$.

$S=\left\{\mathrm{i}\sqrt{2}\,;-\mathrm{i}\sqrt{2}\right\}$

2°) Dans cette question, on revient au cas où m est un réel quelconque.
Résoudre (E). On discutera suivant les valeurs de m.

$(\mathrm{E})\Leftrightarrow 2z^2-2=m$

$\Leftrightarrow z^2=\dfrac{m+2}{2}$

Comme m est un réel, $\dfrac{m+2}{2}$ est aussi un réel. Il faut discuter suivant son signe qui ne dépend que de celui de $m+2$.

On se réfère à la propriété du cours sur la résolution de l'équation $z^2=a$ où a est un réel.

On effectue donc une discussion en distinguant trois cas selon que $m>-2$, $m=-2$, $m<-2$.

• Si $m > -2$, alors $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow z = \sqrt{\dfrac{m+2}{2}}$ ou $z = -\sqrt{\dfrac{m+2}{2}}$ (2 solutions réelles opposées).

• Si $m = -2$, alors $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow z = 0$.

• Si $m < -2$, alors $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow z = \mathrm{i}\sqrt{-\dfrac{m+2}{2}}$ ou $z = -\mathrm{i}\sqrt{-\dfrac{m+2}{2}}$ (2 solutions imaginaires pures opposées et conjuguées).

Avec ce dernier cas, on retrouve les résultats obtenus pour $m = -6$ dans la question 1°).

III.

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $z = (1+\mathrm{i})^{4n+2} \times \mathrm{i}$.
Démontrer que z est un réel. On présentera les calculs justificatifs avant de rédiger une phrase de conclusion.

Les règles sur les puissances permettent d'écrire $z = (1+\mathrm{i})^{4n} \times (1+\mathrm{i})^2 \times \mathrm{i}$.

On calcule $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ et $(1+\mathrm{i})^4 = \left[(1+\mathrm{i})^2\right]^2 = (2\mathrm{i})^2 = -4$.

Ainsi,

$$z = (-4)^n \times 2\mathrm{i} \times \mathrm{i}$$

$$= -2 \times (-4)^n$$

Le résultat obtenu permet d'affirmer que z est un réel.

IV.

Soit λ un réel. On considère l'équation $z^2 + \lambda z + 3 = 0$ (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1°) Résoudre (E) pour $\lambda = -1$.

Pour $\lambda = -1$, (E) s'écrit $z^2 - z + 3 = 0$.

Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels.

Le discriminant est égal à $\Delta = 1 - 12 = -11$.

On a : $\Delta < 0$ donc (E) admet deux racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{1 - \mathrm{i}\sqrt{11}}{2}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{11}}{2}$

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$$S = \left\{ \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{11}}{2} ; \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{11}}{2} \right\}$$

2°) Calculer le discriminant de (E) en fonction de λ.
Déterminer pour quelles valeurs de λ l'équation (E) admet deux solutions complexes distinctes conjuguées.

Le discriminant de (E) est égal à $\Delta = \lambda^2 - 12$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que (E) admette deux solutions complexes distinctes conjuguées est que $\Delta < 0$ c'est-à-dire $-2\sqrt{3} < \lambda < 2\sqrt{3}$.

V.

Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère trois points A, B, C quelconques d'affixes respectives z_{A}, z_{B}, z_{C}.
Soit D le point tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
Exprimer l'affixe z_{D} de D en fonction de z_{A}, z_{B}, z_{C}.

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$

$$\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\overrightarrow{\mathrm{DC}}}$$

$$\Leftrightarrow z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{D}}$$

$$\Leftrightarrow z_{\mathrm{D}} = z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}$$