1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du jeudi 31 janvier 2019 (3 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………………………………..

- Le barème est donné sur 40.
- Il est demandé de ne rien écrire sur l'énoncé en dehors du travail demandé.

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme simplifiée.

2°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.

3°) On note A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
Calculer le coefficient directeur de la tangente *T* en A à $\mathscr{C}$.
Le graphique au verso donne la partie de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right[$.
Tracer *T* avec soin sur ce graphique.

II. (12 points)

À tout réel *m* on associe la fonction $f_m : x \mapsto (x-1)^3 - mx^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie 1 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On suppose dans cette partie que $m = 2$.

1°) Calculer $f_2'(x)$. On donnera le résultat sous forme développée réduite.

2°) Dans un même tableau donner le signe de $f_2'(x)$ suivant les valeurs de *x* et les variations de f_2.

Partie 2 (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

On revient au cas où *m* est un réel quelconque.

1°) Calculer $f_m'(x)$ en fonction de *x* et *m*.

2°) Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par le point $\text{A}(0\,;-1)$.

3°) Calculer le coefficient directeur de la tangente *T* à $\mathscr{C}_m$ en A. Que constate-t-on ?
On demande uniquement le coefficient directeur de *T* et non une équation de *T*.

4°) Déterminer pour quelle valeur de *m* la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse – 2 est horizontale.

5°) Résoudre l'équation $f_m'(x) = 3 \quad (\text{E})$. En déduire qu'il existe un point J_m de $\mathscr{C}_m$ autre que A dont on calculera l'abscisse en lequel la tangente a le même coefficient directeur que *T*.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On dispose d'une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à $\dfrac{1}{3}$.

On considère le jeu suivant :
Le joueur lance une première fois la pièce.
S'il obtient pile, il gagne 3 € et le jeu s'arrête.
S'il obtient face, il relance la pièce. S'il obtient pile, il gagne alors 2 € et le jeu s'arrête, sinon il perd 1 €.
On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros du joueur.
X peut donc prendre les valeurs $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ et $x_3 = -1$.
On note *P* la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.
On pourra utiliser un arbre de probabilités.

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

IV. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère un dé non truqué qui a la forme d'un tétraèdre régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
On lance deux fois de suite le dé. On note chaque fois le numéro porté par la face supérieure et l'on gagne la partie lorsque le plus grand des deux numéros est strictement supérieur à 2.

1°) Calculer la probabilité de gagner. On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

2°) On note X la variable aléatoire qui prend la valeur du plus grand nombre obtenu lors des deux lancers (ou du nombre obtenu si les numéros des deux faces supérieures sont égaux). X peut donc prendre les valeurs $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.
On note *P* la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
Déterminer la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

3°) Compléter l'algorithme ci-dessous qui permet de simuler *n* parties successives indépendantes du jeu.
Le nombre de parties *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1 saisi en entrée.
L'algorithme affiche en sortie la fréquence de parties gagnées.
Les variables *n*, *a*, *i*, *x*, *y*, *m* sont des entiers naturels.

Entrée :
Saisir *n*

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour *i* allant de 1 à *n* **Faire**
    x prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 4
    y prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 4
    m prend la valeur $\max(x, y)$
    Si ….......
        Alors *a* prend la valeur $a+1$
    FinSi
FinPour

Sortie :

Afficher ……..

Indication : On cherchera ce que représente concrètement la valeur de a à la fin de l'algorithme c'est-à-dire une fois la boucle « Pour » terminée.
4°) On effectue n parties à la suite de manière indépendante, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Quel est le plus petit entier naturel n tel que la probabilité de gagner au moins une fois lors d'une partie soit supérieure ou égale à 0,99 ?
Indication : On commencera par exprimer en fonction de n la probabilité de gagner au moins une fois lors d'une partie.

Dans les exercices **V** et **VI**, on se place dans le plan orienté P.
De plus, dans les trois dernières questions de l'exercice **V** et dans l'exercice **VI**, on suppose que P est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O et on considère les points $A(1;0)$, $B(0;1)$, $A'(-1;0)$, $B'(0;-1)$. On note également $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.

V. QCM (7 points)

Cet exercice est un QCM composé de 7 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau à droite avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies. Aucune justification n'est attendue.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) Soit ABC un triangle équilatéral direct.
Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right)$ est :

a. $\dfrac{\pi}{3}$ b. $-\dfrac{\pi}{3}$ c. $-\dfrac{4\pi}{3}$

2°) Soit ABCD un carré direct.
Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD}\right)$ est :

a. $\dfrac{19\pi}{2}$ b. $\dfrac{21\pi}{2}$ c. $-\dfrac{105\pi}{2}$

3°) Soit A, B, C, D quatre points deux à deux distincts alignés dans cet ordre sur une droite.
L'ensemble des points M du plan P distincts de B et C tels que $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}\right)=\pi \ (2\pi)$ est :

a. la demi-droite]BA) b. le segment]BC[c. la demi-droite]CD)

4°) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan P tels que $\dfrac{6\pi}{5}$ soit une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u};\vec{v}\right)$.
Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(-\vec{u};\vec{v}\right)$ est :

a. $-\dfrac{49\pi}{5}$ b. $-\dfrac{4\pi}{5}$ c. $\dfrac{6\pi}{5}$

5°) Un réel associé au point B' est :

a. $\dfrac{2019\pi}{2}$ b. $\dfrac{201\pi}{2}$ c. $-\dfrac{2019\pi}{2}$

6°) Soit M et N deux points de $\mathscr{C}$ associés respectivement à deux réels x et y.
Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)$ est :

a. $x-y$ b. $x+y$ c. $y-x$

7°) L'ensemble des points M du cercle $\mathscr{C}$ dont un réel associé appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{45\pi}{2};23\pi\right]$ est l'arc :

a. $\overset{\frown}{AB}$ b. $\overset{\frown}{A'B}$ c. $\overset{\frown}{A'B'}$

Question	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	**Total**
Réponse								

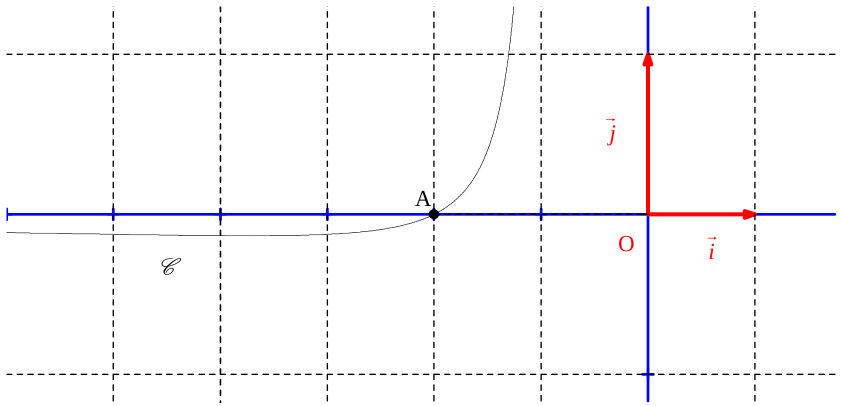
VI. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On note M le milieu de l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$ et N le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AM}$.

1°) Déterminer la mesure principale en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{ON}\right)$.

2°) Déterminer la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}\right)$ qui appartient à l'intervalle $[-20\pi;-18\pi]$.

Graphique de la question 3°) de l'exercice I :



1ère S2 **Prénom et nom :** ……………………………………………..………..…………

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

1°) ………………………………………………………………………… (une seule égalité)

2°) ……………………………………………… (écrire les abscisses sans égalités, séparées par des points-virgules)

3°) ……...

………...

………...

II. (12 points)

Partie 1 (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) ………………………………………………………………………… (une seule égalité)

2°) On attend le plus grand soin : tableau et flèches doivent être faits à la règle.

Partie 2 (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points ; 5°) 2 points)

1°) …………………………………………………………………………

2°) …...………..

………...

………...

………...

3°) ……...

………...

4°) …...………..

………...

………...

………...

………...

………...

………...

5°) …...………..

………...

………...

………...

………...

………...

………...

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Faire le tableau avec soin.

2°) …...………..

………...

………...

IV. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

1°) …..………………………………………………………………………………………………………..

………...

………...

………...

2°)

3°) **Si** ……………… Afficher ……..

4°) ………….. (une seule réponse sans égalité)

Expliquer la démarche sur les lignes ci-dessous.

………...

………...

………...

………...

………...

………...

V. QCM (7 points)

Question	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	**Total**
Réponse								

VI. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) Répondre par deux phrases (modèle : « La mesure principale en radians de l'angle orienté ….. est égale à …. »).

………...

………...

………...

………...

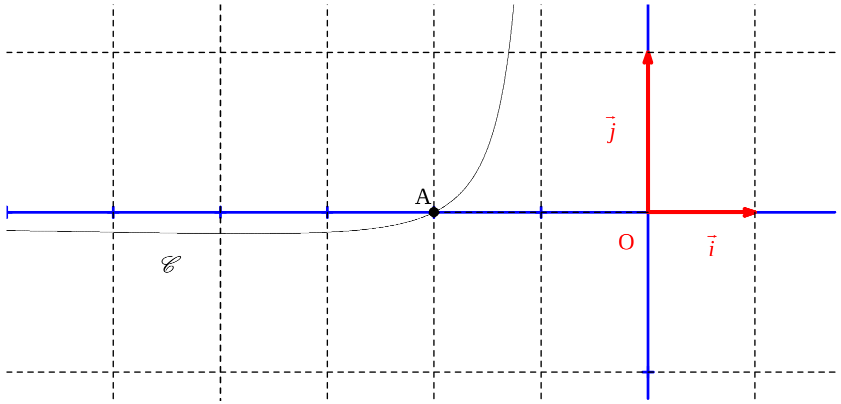
2°) ……………. (une seule réponse, sans égalité)

Expliquer succinctement la démarche.

………...

………...

Graphique de la question 3°) de l'exercice I :



Prénom et nom : ……………………………………………..…………..…………

I (6 points)	**II (12 points)**	**III (4 points)**	**IV (8 points)**	**V (7 points)**	**VI (3 points)**	**Total/40**	**Total/20**

Corrigé du contrôle du 31-1-2019

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-1}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On vérifie immédiatement que l'ensemble de définition de f est bien $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$. En effet, les valeurs d'annulation de x^2-1 sont – 1 et 1.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera le résultat sous forme simplifiée.

On applique la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\} \quad f'(x) = \frac{1\times\left(x^2-1\right)-(x+2)\times 2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{x^2-1-2x^2-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$= \frac{-x^2-4x-1}{\left(x^2-1\right)^2}$$

2°) Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale.

$$-2-\sqrt{3}\ ;\ -2+\sqrt{3}$$

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont les solutions de l'équation $f'(x)=0 \quad (1)$.

On résout cette équation dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

$(1) \Leftrightarrow -x^2-4x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-2-\sqrt{3}$ ou $x=-2+\sqrt{3}$ (racines obtenues à l'aide du discriminant réduit ou à l'aide de la calculatrice).

Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente est horizontale sont égales à $-2-\sqrt{3}$ et $-2+\sqrt{3}$.

3°) On note A le point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
Calculer le coefficient directeur de la tangente T en A à $\mathscr{C}$.
Le graphique au verso donne la partie de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$.
Tracer T avec soin sur ce graphique.

L'abscisse du point A est la solution de l'équation $f(x)=0$.
La solution apparaît immédiatement : – 2 (valeur d'annulation du numérateur).

Le point A a donc pour abscisse – 2.

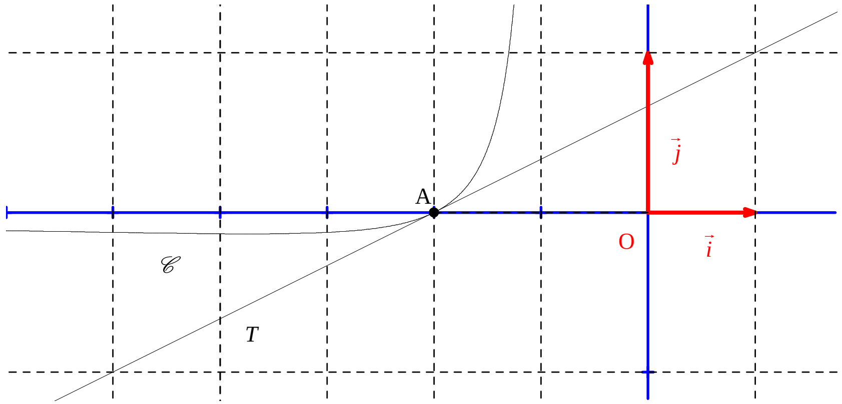
Pour déterminer le coefficient directeur de la tangente T en A à $\mathscr{C}$, on calcule $f'(-2)$.

$$f'(-2) = -\frac{(-2)^2+4\times(-2)+1}{\left[(-2)^2-1\right]^2}$$

$$= -\frac{-3}{3^2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Le coefficient directeur de T est égal à $\dfrac{1}{3}$.



• Le vecteur $\vec{u}(3\,;1)$ est un vecteur directeur de T. On avance de 3 unités vers la droite et on monte d'une unité vers le haut.

• Il n'y a pas besoin de déterminer une équation de T.

II.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto (x-1)^3 - mx^2$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie 1

On suppose dans cette partie que $m=2$.

1°) Calculer $f_2'(x)$. On donnera le résultat sous forme développée réduite.

On peut dériver directement f_2 avec l'expression initiale à savoir $f_2(x)=(x-1)^3-2x^2$.

On peut aussi développer $f_2(x)$ puis dériver.
On peut enfin dériver f_m directement (ce qui avance pour la partie 2) puis faire $m = 2$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_2'(x) = 3(x-1)^2 - 2\times 2x$ (utilisation de la formule $\left(u^3\right)' = 3u'u^2$)

$$= 3\left(x^2 - 2x + 1\right) - 4x$$

$$= 3x^2 - 10x + 3$$

2°) Dans un même tableau donner le signe de $f_2'(x)$ suivant les valeurs de x et les variations de f_2.

Pour étudier le signe de $f_2'(x)$, on est obligé d'utiliser la forme développée $3x^2 - 10x + 3$.
$f_2'(x)$ est un polynôme du second degré qui s'annule pour $\frac{1}{3}$ et 3.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
Signe de $f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f_2		$\nearrow$	$-\frac{14}{27}$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	

On calcule les extremums locaux $f_2\left(\frac{1}{3}\right)$ et $f_2(3)$.

On vérifie les variations en traçant la courbe représentative de f_2 sur l'écran de la calculatrice.

Partie 2

On revient au cas où m est un réel quelconque.

1°) Calculer $f_m'(x)$ en fonction de x et m.

Le mieux est de dériver f_m directement. $f_m(x) = (x-1)^3 - mx^2$.
On utilise la formule $\left(u^3\right)' = 3u'u^2$ pour la première partie.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m'(x) = 3\times 1\times(x-1)^2 - m\times 2x$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_m'(x) = 3(x-1)^2 - 2mx$

Il n'y a pas besoin de développer le résultat.

2°) Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par le point $A(0\,;-1)$.

On utilise un calcul.
$\forall m \in \mathbb{R} \quad f_m(0) = (0-1)^3 - m\times 0^2 = -1$

Ainsi toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par le point $A(0\,;-1)$.

3°) Calculer le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}_m$ en A. Que constate-t-on ?
On demande uniquement le coefficient directeur de T et non une équation de T.

On calcule $f_m'(0)$.

$\forall m \in \mathbb{R} \quad f_m'(0) = 3(0-1)^2 - 2m\times 0 = 3$

Le coefficient directeur de T est égal à 3. On constate que le résultat est indépendant de m.

4°) Déterminer pour quelle valeur de m la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse -2 est horizontale.

Pour que la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse -2 soit horizontale, il faut et il suffit que $f_m'(-2) = 0 \quad (1)$.

$\forall m \in \mathbb{R} \quad f_m'(-2) = 3(-2-1)^2 - 2m\times(-2)$

$$= 3\times 9 + 4m$$

$$= 27 + 4m$$

Ainsi $(1) \Leftrightarrow m = -\frac{27}{4}$

On en déduit que $-\frac{27}{4}$ est la seule valeur de m pour laquelle la tangente à $\mathscr{C}_m$ au point d'abscisse -2 est horizontale.

5°) Résoudre l'équation $f_m'(x) = 3 \quad (\text{E})$. En déduire qu'il existe un point J_m de $\mathscr{C}_m$ autre que A dont on calculera l'abscisse en lequel la tangente a le même coefficient directeur que T.

(E) est successivement équivalente à :
$3(x-1)^2 - 2mx = 3$
$3x^2 - 6x + \cancel{3} - 2mx = \cancel{3}$
$3x^2 - (6+2m)x = 0$
$x\left[3x - (6+2m)\right] = 0$
$x = 0$ ou $3x - (6+2m) = 0$
$x = 0$ ou $x = \frac{6+2m}{3}$

La tangente T a pour coefficient 3 d'après la question 3°). Les solutions de (E) sont donc les abscisses des points en lesquels la tangente est parallèle à T.

$\mathscr{C}_m$ admet une tangente de même coefficient directeur que T au point J_m d'abscisse $\dfrac{6+2m}{3}$.

On peut noter que ce point est distinct de A sauf pour $m=-3$.

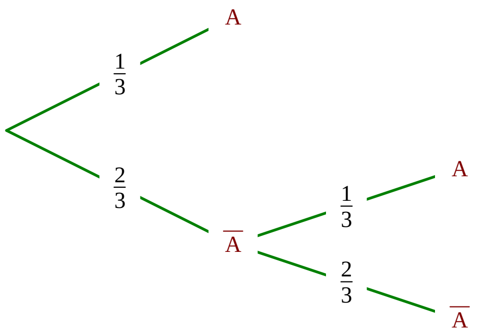
III.

On dispose d'une pièce de monnaie telle que la probabilité d'obtenir pile en un lancer soit égale à $\dfrac{1}{3}$.

On considère le jeu suivant :
Le joueur lance une première fois la pièce.
S'il obtient pile, il gagne 3 € et le jeu s'arrête.
S'il obtient face, il relance la pièce. S'il obtient pile, il gagne alors 2 € et le jeu s'arrête, sinon il perd 1 €.
On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros du joueur.
X peut donc prendre les valeurs $x_1=3$, $x_2=2$ et $x_3=-1$.
On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.

1°) Déterminer la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.
On pourra utiliser un arbre de probabilités.

On note A l'événement « obtenir pile en un lancer ».



x_i	2	3	-1	
$P(X=x_i)$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{4}{9}$	Total $=1$

2°) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{3}-1\times\frac{4}{9}\\&=\cancel{\frac{4}{9}}+1-\cancel{\frac{4}{9}}\\&=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X)&=2^2\times\frac{2}{9}+3^2\times\frac{1}{3}+(-1)^2\times\frac{4}{9}-1^2 \quad \text{(formule de Koenig-Huygens)}\\&=\frac{10}{3}\end{aligned}$$

IV.

On considère un dé non truqué qui a la forme d'un tétraèdre régulier dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
On lance deux fois de suite le dé. On note chaque fois le numéro porté par la face supérieure et l'on gagne la partie lorsque le plus grand des deux numéros est strictement supérieur à 2.

1°) Calculer la probabilité de gagner. On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

1ère méthode :

On écrit tous les couples gagnants : $(1\,;3)$, $(3\,;1)$, $(1\,;4)$, $(4\,;1)$ etc.
Il y a 12 couples gagnants sur un total de 16.
La probabilité de gagner la partie est donc égale à $\dfrac{12}{16}=\dfrac{3}{4}$.

2e méthode :

On fait un arbre de possibilités puis on écrit tous les chemins correspondant à des tirages gagnants.
On a 12 couples correspondant à des tirages gagnants. Chaque couple a une probabilité de $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}$ (principe multiplicatif par indépendance des lancers).
La probabilité de gagner la partie est donc égale à $12\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{4}$.

2°) On note X la variable aléatoire qui prend la valeur du plus grand nombre obtenu lors des deux lancers (ou du nombre obtenu si les numéros des deux faces supérieures sont égaux). X peut donc prendre les valeurs $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$.
On note P la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
Déterminer la loi de probabilité de X sous forme d'un tableau.

x_i	1	2	3	4	
$P(X=x_i)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{5}{16}$	$\dfrac{7}{16}$	Total $=1$

3°) Compléter l'algorithme ci-dessous qui permet de simuler n parties successives indépendantes du jeu.
Le nombre de parties n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 saisi en entrée.
L'algorithme affiche en sortie la fréquence de parties gagnées.
Les variables n, a, i, x, y, m sont des entiers naturels.

Entrée :
Saisir n

Initialisation :
a prend la valeur 0

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  x prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 4
  y prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 4
  m prend la valeur $\max(x, y)$
  Si $m > 2$
    Alors a prend la valeur $a+1$
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher $\dfrac{a}{n}$

Indication : On cherchera ce que représente concrètement la valeur de a à la fin de l'algorithme c'est-à-dire une fois la boucle « Pour » terminée.

Entrée :
Saisir n — nombre de parties

Initialisation :
a prend la valeur 0 — compteur (compte le nombre de parties gagnées)

Traitement :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  x prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 4 — 1$^{\text{er}}$ tirage
  y prend la valeur d'un entier aléatoire entre 1 et 4 — 2$^{\text{e}}$ tirage
  m prend la valeur $\max(x, y)$ — nombre maximum
  Si $m > 2$
    Alors a prend la valeur $a+1$
  FinSi
FinPour

Sortie :
Afficher $\dfrac{a}{n}$

4°) On effectue n parties à la suite de manière indépendante, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Quel est le plus petit entier naturel n tel que la probabilité de gagner au moins une fois lors d'une partie soit supérieure ou égale à 0,99 ?
Indication : On commencera par exprimer en fonction de n la probabilité de gagner au moins une fois lors d'une partie.

On va passer par l'événement contraire : le contraire « au moins une fois » est « jamais » ou « aucune fois ».

Le contraire de l'événement « gagner au moins une fois une partie » est « ne gagner aucune partie ».

La probabilité de perdre une partie est $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ donc la probabilité de perdre chaque partie est $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ (principe multiplicatif par indépendance des parties).

La probabilité de gagner au moins une fois une partie est égale à $p_n=1-\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On cherche $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $p_n \geqslant 0{,}99$ soit $1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \geqslant 0{,}99 \quad (1)$.

On ne sait pas résoudre cette inéquation par le calcul en 1$^{\text{ère}}$.

On procède par essais successifs sur la calculatrice en remplaçant n par des valeurs de plus en plus grandes jusqu'à trouver la plus petite valeur de n pour laquelle l'inégalité (1) est vérifiée.

On ne peut trouver « à la main » la valeur de n. Ce serait trop long. On utilise la calculatrice.

On trouve $n=4$.

On peut définir la fonction $f : x \mapsto 1-\left(\frac{1}{4}\right)^x$ et faire un tableau de valeurs en choisissant $x=0$ pour valeur de début et un pas de 1 sur calculatrice.

Dans les exercices **V** et **VI**, on se place dans le plan orienté P.
De plus, dans les trois dernières questions de l'exercice **V** et dans l'exercice **VI**, on suppose que P est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O et on considère les points $\mathrm{A}(1\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;1)$, $\mathrm{A'}(-1\,;0)$, $\mathrm{B'}(0\,;-1)$. On note également $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.

V. QCM

Cet exercice est un QCM composé de 7 questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, trois réponses sont proposées ; une seule réponse est exacte.
Compléter le tableau à droite avec les lettres a, b, c correspondant aux réponses choisies. Aucune justification n'est attendue.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Aucun point n'est retiré en l'absence de réponse.

1°) Soit ABC un triangle équilatéral direct.
Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC}\right)$ est :

a. $\dfrac{\pi}{3}$ b. $-\dfrac{\pi}{3}$ c. $-\dfrac{4\pi}{3}$

2°) Soit ABCD un carré direct.
Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BD}\right)$ est :

a. $\dfrac{19\pi}{2}$ b. $\dfrac{21\pi}{2}$ c. $-\dfrac{105\pi}{2}$

3°) Soit A, B, C, D quatre points deux à deux distincts alignés dans cet ordre sur une droite.
L'ensemble des points M du plan *P* distincts de B et C tels que $\left(\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MC}\right)=\pi\ \ (2\pi)$ est :

a. la demi-droite]BA) b. le segment]BC[c. la demi-droite]CD)

4°) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan *P* tels que $\dfrac{6\pi}{5}$ soit une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.
Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est :

a. $-\dfrac{49\pi}{5}$ b. $-\dfrac{4\pi}{5}$ c. $\dfrac{6\pi}{5}$

5°) Un réel associé au point B' est :

a. $\dfrac{2019\pi}{2}$ b. $\dfrac{201\pi}{2}$ c. $-\dfrac{2019\pi}{2}$

6°) Soit M et N deux points de $\mathscr{C}$ associés respectivement à deux réels *x* et *y*.
Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{ON}\right)$ est :

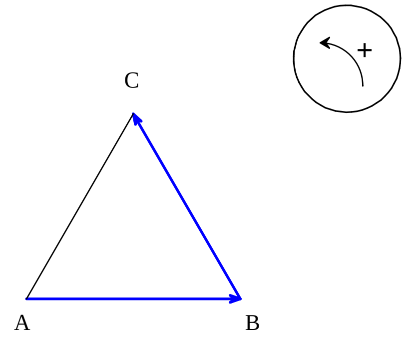
a. $x-y$ b. $x+y$ c. $y-x$

7°) L'ensemble des points M du cercle $\mathscr{C}$ dont un réel associé appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{45\pi}{2}\,;23\pi\right]$ est l'arc :

a. $\overset{\frown}{AB}$ b. $\overset{\frown}{A'B}$ c. $\overset{\frown}{A'B'}$

Question	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	**Total**
Réponse	c	b	b	a	a	c	b	

1°)



On s'intéresse à l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC}\right)$.
La difficulté vient du fait que les deux vecteurs n'ont pas la même origine.

1ère méthode :

On peut écrire $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC}\right)=\left(-\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)$.

Par une propriété du cours, $\left(-\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)-\pi$.

Or ABC est un triangle équilatéral direct donc $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$.

On a $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{4\pi}{3}$.

Variante :

Par une propriété du cours, $\left(-\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)+\pi$.

Or ABC est un triangle équilatéral direct donc $\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{3}$.

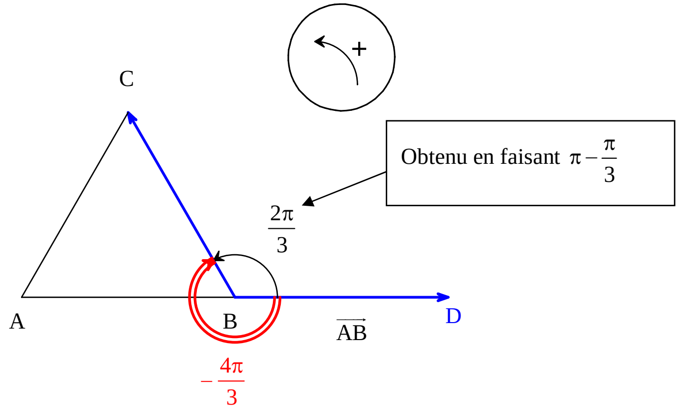
On a $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$. Il faut ensuite retirer 2π pour faire apparaître la mesure $-\dfrac{4\pi}{3}$ qui est proposée

2e méthode :

On fait glisser l'un des deux vecteurs de manière à se ramener à deux vecteurs ayant la même origine.
Il y a plusieurs choix possibles :

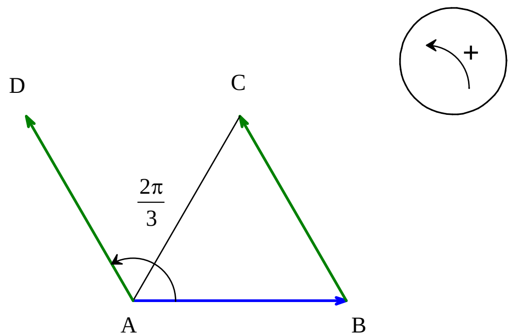
Choix 1 : se ramener à deux vecteurs d'origine B

On note D le point tel que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}$.

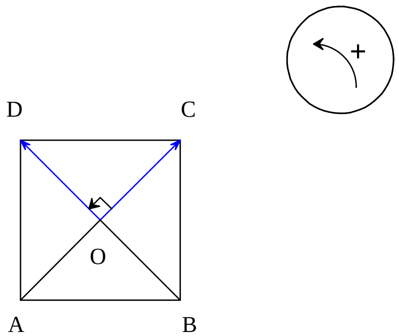


On a $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BC}\right)$.
On travaille ensuite géométriquement en faisant apparaître les angles orientés.

Choix 2 : se ramener à deux vecteurs d'origine A



2°) On commence par faire une figure du carré ABCD qui est supposé direct.



Pour déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BD}\right)$, on peut soit déplacer les vecteurs, soit les remplacer par des vecteurs colinéaires de même sens.
Avec cette deuxième façon, on peut par exemple introduire le point O, centre du carré ABCD.

On peut alors écrire $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BD}\right)=\left(2\overrightarrow{OC}\,;2\overrightarrow{OD}\right)$ ce qui permet ensuite d'écrire $\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)$.

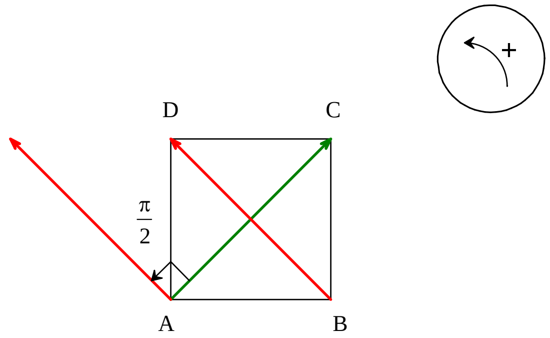
On voit ensuite aisément que l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)$ est un angle droit direct. Par conséquent, $\frac{\pi}{2}$ est la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)$.

On transforme les différents quotients proposés de manière à faire apparaître les mesures principales.

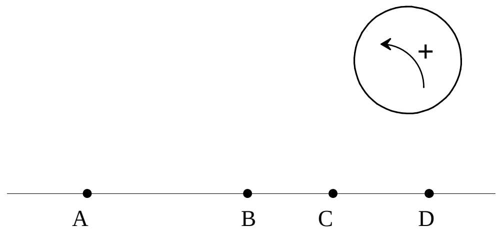
$\frac{19\pi}{2}=\frac{20\pi-\pi}{2}=10\pi-\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\frac{21\pi}{2}=\frac{20\pi+\pi}{2}=10\pi+\frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $-\frac{105\pi}{2}=-\frac{104\pi+\pi}{2}=-52\pi-\frac{\pi}{2}$

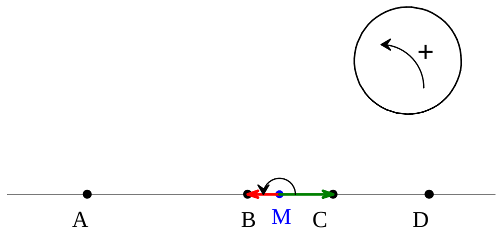
$\frac{21\pi}{2}$ est donc une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OD}\right)$.

Autre méthode :



3°) La condition $\left(\overrightarrow{MB}\,;\overrightarrow{MC}\right)=\pi\ \ (2\pi)$ se traduit par « $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont colinéaires de sens contraire ». Cette condition n'est vérifiée que pour les points du segment $]BC[$.





4°)

$\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)+\pi$

$\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{6\pi}{5}+\pi$

$\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{11\pi}{5}$

On calcule $\dfrac{11\pi}{5}-\left(-\dfrac{49\pi}{5}\right)=\dfrac{11\pi+49\pi}{5}=12\pi$.

12π est un réel de la forme $2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ donc $-\dfrac{49\pi}{5}$ est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

On peut aussi passer par la mesure principale de $\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

$\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{10\pi}{5}+\dfrac{\pi}{5}$

$\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{5}+2\pi$

$\dfrac{\pi}{5}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

La mesure principale en radians de $\left(-\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est $\dfrac{\pi}{5}$.

5°)

$\dfrac{2019\pi}{2}=\dfrac{2020\pi-\pi}{2}=1010\pi-\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\dfrac{201\pi}{2}=\dfrac{200\pi+\pi}{2}=100\pi+\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $-\dfrac{2019\pi}{2}=\dfrac{\pi-2020\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}-1010\pi$

Un réel associé au point B' est donc $\dfrac{201\pi}{2}$.

6°) Il s'agit d'un résultat du cours qui se redémontre aisément.

On peut éventuellement faire un graphique avec le cercle trigonométrique et les points M et M'.

Comme M et M' sont associés respectivement à x et y, on a $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)=x$ et $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=y$.

$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$ (relation de Chasles pour les angles orientés)

$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=-x+y$

$\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=y-x$

Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$ est $y-x$.

On peut presque lire le résultat graphiquement.

7°) L'ensemble des points M du cercle $\mathscr{C}$ dont un réel associé appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{45\pi}{2}\,;23\pi\right]$ est l'arc :

a. $\overset{\frown}{AB}$ $\qquad$ b. $\overset{\frown}{A'B}$ $\qquad$ c. $\overset{\frown}{A'B'}$

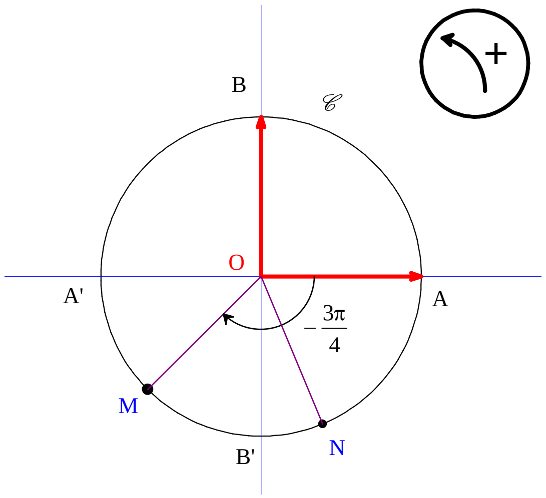
On commence par écrire $\dfrac{45\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}+22\pi$ et $23\pi=\pi+22\pi$.

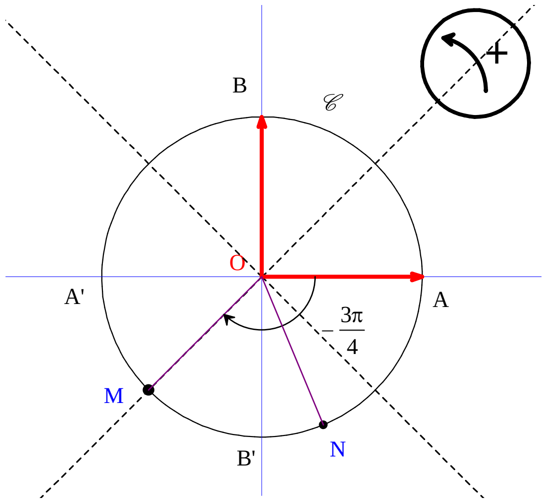
On remplace l'intervalle $\left[\dfrac{45\pi}{2}\,;23\pi\right]$ par l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

On utilise ensuite un cercle trigonométrique sur lequel on effectue des déplacements.

VI.

On note M le milieu de l'arc $\overset{\frown}{A'B'}$ et N le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AM}$.





On peut éventuellement repasser en couleur les arcs $\overset{\frown}{A'B'}$ et $\overset{\frown}{AM}$.

On fait apparaître la mesure principale de l'angle orienté en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ (codage classique d'un angle orienté).

1°) Déterminer la mesure principale en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{ON}\right)$.

Par lecture graphique simple, on obtient que M est associé aux réels $\frac{5\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ est égale à $-\frac{3\pi}{4}$.

La mesure principale en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{ON}\right)$ est égale à $-\frac{3\pi}{8}$.

2°) Déterminer la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ qui appartient à l'intervalle $[-20\pi\,;-18\pi]$.

$$-\frac{75\pi}{4}$$

1ère méthode :

On part de l'encadrement $-2\pi \leqslant -\frac{3\pi}{4} \leqslant 0$.

On ajoute -18π à chaque membre de cette inégalité.

On obtient alors : $-20\pi \leqslant -\frac{3\pi}{4} - 18\pi \leqslant -18\pi$.

On calcule $-\frac{3\pi}{4} - 18\pi$. On trouve $-\frac{75\pi}{4}$.

2e méthode :

On sait que les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ sont les réels de la forme $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ avec k entier relatif.

On cherche la mesure en radians qui appartient à l'intervalle $[-20\pi\,;-18\pi]$.

Pour cela, on cherche l'entier relatif k tel que $-20\pi \leqslant -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant -18\pi$.

On résout cette double inéquation et on trouve la valeur de k, à savoir -9.