TS1

Contrôle du lundi 3 juin 2019
(50 minutes)

Prénom : ………………………………. **Nom :** ……………………………….

Note : …. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Une usine fabrique des ressorts métalliques. Ceux-ci subissent un test de conformité à l'issue de la chaîne de fabrication.
On souhaite estimer la proportion p de ressorts conformes dans l'ensemble de la production. Pour cela, on prélève au hasard un échantillon de 50 ressorts parmi cette production (celle-ci est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise). On constate que 44 ressorts de cet échantillon sont conformes aux normes fixées par le cahier des charges.

1°) Calculer la fréquence f de ressorts conformes pour l'échantillon prélevé.

………………………………. (une seule égalité)

On attend une réponse sous la forme $f = \ldots\ldots$.

Cette valeur est une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p des ressorts qui sont conformes aux normes dans l'ensemble de la production.

2°) On pose $a = f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$ et $b = f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$. L'intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$ est un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.
On note a' l'approximation décimale au millième par défaut de a et b' l'approximation décimale au millième par excès de b. On pose $\mathrm{J} = [a'\,;b']$.
Écrire J.

…………………………………………… (une seule réponse)

On attend une réponse sous la forme $\mathrm{J} = \ldots\ldots$. Il s'agit d'une égalité d'ensembles.

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M de P dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'inégalité $x^2 + y^2 \leqslant 9$.
Faire un graphique dans l'espace ci-contre et hachurer l'ensemble $\mathcal{D}$.

……..………

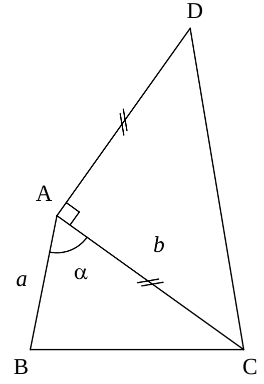
……..………

2°) Calculer $\mathcal{A}$ l'aire de $\mathcal{D}$. On attend la valeur exacte.

……..

III. (7 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 3 points)

Soit ABC un triangle quelconque du plan P tel que l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ ne soit pas obtus. On construit le point D tel que le triangle ACD soit situé extérieurement au triangle ABC et soit isocèle rectangle en A. On pose $\mathrm{AB} = a$ et $\mathrm{AC} = b$ (a et b étant deux réels strictement positifs). On note également α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ ($\alpha \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$).



1°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ en fonction de a, b, α sous la forme la plus simple possible.

2°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ en fonction de a, b, α sous la forme la plus simple possible.

3°) Exprimer BD^2 en fonction de a, b, α.

En déduire BD lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Cette expression était-elle prévisible ? Expliquer.

IV. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

Soit A et B deux points fixés de l'espace E. On note I le milieu de $[AB]$.

1°) Recopier et compléter l'égalité suivante :

$$« \ \forall M \in E \quad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{....}\right) \ »$$

Justifier avec soin.

2°) On suppose dans cette question que A et B sont distincts.

Déterminer l'ensemble F des points M de E tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AM}$.

Corrigé du contrôle du 3-6-2019

I.

Une usine fabrique des ressorts métalliques. Ceux-ci subissent un test de conformité à l'issue de la chaîne de fabrication.
On souhaite estimer la proportion p de ressorts conformes dans l'ensemble de la production. Pour cela, on prélève au hasard un échantillon de 50 ressorts parmi cette production (celle-ci est suffisamment importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise). On constate que 44 ressorts de cet échantillon sont conformes aux normes fixées par le cahier des charges.

1°) Calculer la fréquence f de ressorts conformes pour l'échantillon prélevé.

$$f = \frac{22}{25} = 0,88 \text{ (une seule égalité)}$$

On attend une réponse sous la forme $f = \ldots\ldots$.

Cette valeur est une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p des ressorts qui sont conformes aux normes dans l'ensemble de la production.

2°) On pose $a = f - 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$ et $b = f + 1,96\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}$. L'intervalle $\mathrm{I} = [a\,;b]$ est un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p au niveau de confiance de 95 %.
On note a' l'approximation décimale au millième par défaut de a et b' l'approximation décimale au millième par excès de b. On pose $\mathrm{J} = [a'\,;b']$.
Écrire J.

$$\mathrm{J} = [0,789\,;0,970] \text{ (une seule réponse)}$$

On attend une réponse sous la forme $\mathrm{J} = \ldots\ldots$. Il s'agit d'une égalité d'ensembles.

II.

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer et hachurer l'ensemble $\mathcal{D}$ des points M de P dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'inégalité $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

$\mathcal{D}$ est le disque fermé de centre O et de rayon 3.

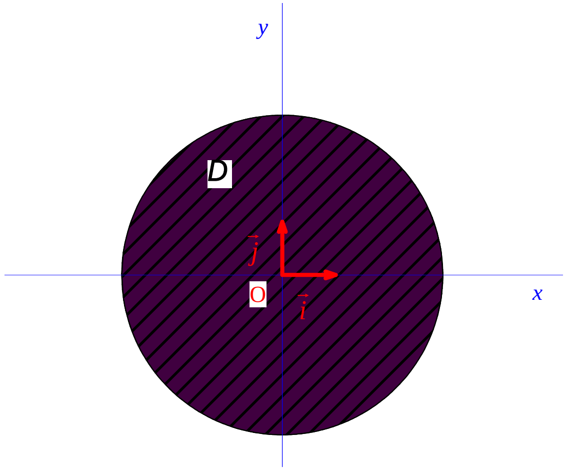
On peut justifier de la manière suivante.

Soit M un point quelconque du plan P de coordonnées $(x\,;y)$.

On sait que $\mathrm{OM}^2 = x^2 + y^2$ car le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé.

$\mathrm{M} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \mathrm{OM}^2 \leqslant 9$

$\Leftrightarrow \mathrm{OM} \leqslant 3$

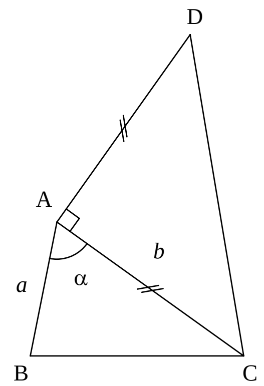


2°) Calculer $\mathcal{A}$ l'aire de $\mathcal{D}$. On attend la valeur exacte.

$\mathcal{A} = \pi \times 3^2 = 9\pi$ (unités d'aire)

III.

Soit ABC un triangle quelconque du plan P tel que l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ ne soit pas obtus. On construit le point D tel que le triangle ACD soit situé extérieurement au triangle ABC et soit isocèle rectangle en A. On pose $\mathrm{AB} = a$ et $\mathrm{AC} = b$ (a et b étant deux réels strictement positifs). On note également α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ ($\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$).



1°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ en fonction de a, b, α sous la forme la plus simple possible.

On applique la définition du produit scalaire de deux vecteurs non nuls.
On observe tout d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ont la même origine.

Pour la suite, on a besoin de s'intéresser à l'angle $\widehat{\text{BAD}}$. On peut écrire $\widehat{\text{BAD}} = \widehat{\text{BAC}} + \widehat{\text{CAD}} = \alpha + \frac{\pi}{2}$.

$\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AD}} = \text{AB} \times \text{AD} \times \cos \widehat{\text{BAD}}$

$= a \times b \times \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ (parenthèses obligatoires après le cos)

$= a \times b \times (-\sin\alpha)$ (formule de trigonométrie $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$)

$= -ab\sin\alpha$

On peut retrouver cette formule grâce au cercle trigonométrique.

• On évite d'utiliser les normes puisqu'il s'agit de produits scalaires de vecteurs définis par des points.

• Il ne faut pas oublier que l'unité d'angle utilisée ici est le radian.

• Le signe du produit scalaire est négatif ce qui est cohérent puisque l'on observe que l'angle $\widehat{\text{BAD}}$ est obtus.

2°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{BD}}$ en fonction de *a*, *b*, α sous la forme la plus simple possible.

On ne peut pas calculer directement ce produit scalaire. On utilise une méthode par décomposition.

① On peut écrire $\overrightarrow{\text{BD}} = \overrightarrow{\text{AD}} - \overrightarrow{\text{AB}}$.

$\overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{BD}} = \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \left(\overrightarrow{\text{AD}} - \overrightarrow{\text{AB}}\right)$

$= \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{AD}} - \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{AB}}$

$= 0 - \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{AB}}$ (comme le triangle ACD est rectangle en A, les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ sont orthogonaux)

$= -\overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{AB}}$

$= -ab\cos\alpha$

② Variante : On peut écrire $\overrightarrow{\text{BD}} = \overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AD}}$ (relation de Chasles).

$\overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{BD}} = \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \left(\overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AD}}\right)$

$= \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{AD}}$

$= \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{BA}} + 0$ (comme le triangle ACD est rectangle en A, les vecteurs $\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{AD}}$ sont orthogonaux)

$= \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{BA}}$

$= \overrightarrow{\text{AC}} \bullet \left(-\overrightarrow{\text{AB}}\right)$

$= -\left(\overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{AB}}\right)$

$= -ab\cos\alpha$

Dans cette variante, il faut faire attention au calcul de $\overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{BA}}$. Les deux vecteurs n'ont pas la même origine.
Il faut transformer le vecteur $\overrightarrow{\text{BA}}$ en $-\overrightarrow{\text{AB}}$.
On peut aussi faire glisser le vecteur $\overrightarrow{\text{BA}}$ de manière à se ramener à des vecteurs de même origine.

3°) Exprimer BD^2 en fonction de *a*, *b*, α.
En déduire BD lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Cette expression était-elle prévisible ? Expliquer.

D'après la « formule du côté » (formule d'Al Kashi) dans le triangle ABD, on a :

$\text{BD}^2 = \text{AB}^2 + \text{AD}^2 - 2 \times \text{AB} \times \text{AD} \times \cos \widehat{\text{BAD}}$

$= a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ ($\text{AD} = \text{AC} = b$ puisque ACD est isocèle en A)

$= a^2 + b^2 + 2ab\sin\alpha$

Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'égalité obtenue précédemment donne :

$\text{BD}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\sin\frac{\pi}{2}$

$= a^2 + b^2 + 2ab$

$= (a+b)^2$

Par suite, $\text{BD} = \sqrt{(a+b)^2} = |\, a+b \,|$.

Comme *a* et *b* sont strictement positifs, $a+b$ est aussi strictement positif.
On en déduit que $\text{BD} = a+b$.

Ce résultat était prévisible. En effet, lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\widehat{\text{BAD}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$.
L'angle $\widehat{\text{BAD}}$ est plat donc les points B, A, D sont alignés dans cet ordre.
On a donc $\text{BD} = \text{BA} + \text{AD} = a+b$ (la longueur BD s'obtient en ajoutant les longueurs BA et AD).

IV.

Soit A et B deux points fixés de l'espace *E*. On note I le milieu de $[\text{AB}]$.

1°) Recopier et compléter l'égalité suivante :

« $\forall \text{M} \in E \quad \overrightarrow{\text{MA}} \bullet \overrightarrow{\text{MB}} - \overrightarrow{\text{MA}} \bullet \overrightarrow{\text{AM}} = 2\left(\overrightarrow{\text{MA}} \bullet \overrightarrow{....}\right)$ »

Justifier avec soin.

$\forall \mathrm{M} \in E \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)$ (propriété $\vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} - \vec{w}\right)$)

$= \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)$

$= \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \left(2\overrightarrow{\mathrm{MI}}\right)$

$= 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}}\right)$ (propriété $\vec{u} \cdot \left(k\vec{v}\right) = k\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$)

On utilise la propriété fondamentale $\forall \mathrm{M} \in E \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}$ car I est le milieu de $[\mathrm{AB}]$ par hypothèse.
Cette propriété se démontre très facilement grâce à la relation de Chasles.

2°) On suppose dans cette question que A et B sont distincts.

Déterminer l'ensemble F des points M de E tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

Soit M un point quelconque de E.

$\mathrm{M} \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MI}} = 0$

- Cette dernière égalité traduit l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{MI}}$. On évite de parler d'angle droit.
On reconnaît alors un lieu géométrique de référence lié à l'orthogonalité.
- À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), on doit formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).
- « Le point M n'est pas fixé ».

L'ensemble F est la sphère de diamètre $[\mathrm{AI}]$.