$1^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du mercredi 29 mai 2019 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel *n*, on ait $3u_{n+1}-2u_n=0$.

1°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

………

………

………

2°) Dans cette question, on suppose que $u_0=2$.

• Exprimer u_n en fonction de *n*.

……………………………………… (une seule égalité, sous forme quantifiée)

• Exprimer $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k$ en fonction de *n* sous forme simplifiée.

………………………………………………………..… (une seule égalité, sous forme quantifiée)

Dans les exercices **II** et **III**, le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On effectuera deux graphiques au brouillon. On n'hésitera pas à faire toutes les vérifications possibles.

II. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On note Δ la droite d'équation $x-y=0$. On considère un réel *a* non nul. On note A le point de Δ d'abscisse *a* et B le point de coordonnées $(-a\,;0)$.

Faire un graphique pour une valeur de *a* choisie (strictement positive). Les questions sont indépendantes.

1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[\text{OA}]$.

On attend une rédaction correcte.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) Déterminer les coordonnées du milieu K de $[\text{AB}]$.

……………………….. (une seule réponse, sans justifier)

3°) Exprimer OB en fonction de *a*.

……………………….. (une seule réponse sous forme d'une égalité, sans justifier)

4°) Déterminer une équation de la médiatrice *D* de $[\text{OB}]$.

……………………….. (une seule réponse, sans justifier)

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points)

On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2=25$.

1°) Préciser le centre et le rayon de $\mathscr{C}$. Répondre directement par une phrase correctement rédigée. Tracer $\mathscr{C}$.

………

………

2°) On note E et F les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, E étant d'abscisse positive et F d'abscisse négative. On note également G et H les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées, G étant d'ordonnée positive et H d'ordonnée négative. Placer ces points sur le graphique.
Tracer la tangente *T* en G à $\mathscr{C}$ puis écrire une équation de *T*.

……………………….. (une seule réponse, sans justifier)

3°) Déterminer un point A de $\mathscr{C}$ à coordonnées entières, distinct de E, F, G, H. On complètera sans justifier la phrase suivante.

Le point A de coordonnées ………………… appartient à $\mathscr{C}$.

Rappeler la définition de la tangente *D* en A à $\mathscr{C}$ puis déterminer une équation cartésienne de *D*.

……..………………………………………………………………………………………………………

……..………………………………………………………………………………………………………

……..………………………………………………………………………………………………………

……..………………………………………………………………………………………………………

……..………………………………………………………………………………………………………

……..………………………………………………………………………………………………………

……..………………………………………………………………………………………………………

……..………………………………………………………………………………………………………

IV. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Une société de location de voiture propose à ses clients deux contrats de location : un contrat de courte durée (inférieure à 2 jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours). Le directeur de cette société affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée.
On travaillera avec des fractions qu'il n'est pas nécessaire de rendre irréductibles.

1°) Dans cette question, on suppose que l'affirmation du directeur est correcte c'est-à-dire que la proportion de contrats de courtes durée est $p = 0,8$ (hypothèse H).
Déterminer un intervalle de fluctuation I au seuil approximatif de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée pour un échantillon aléatoire de taille 600.
Écrire l'intervalle I sur la ligne ci-dessous en écrivant les bornes sous forme fractionnaire (inutile d'écrire des fractions irréductibles).

………………………………………….. (une seule réponse)

Quelles vérifications peut-on faire ?

……………………………………………………………………………………………..……………………………..

2°) Sur les 600 derniers contrats signés l'année précédente, 550 étaient des contrats de courte durée.
Quelle est la fréquence *f* de contrats de courte durée observée dans cet échantillon ?

…………………… (une seule réponse)

3°) Que peut-on penser de l'affirmation du directeur ? Justifier avec précision en utilisant les résultats du 1°).

……………………………………………………………………………………………..……………………………..

………..

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Soit x un réel tel que $\cos x = -\dfrac{1}{3}$. Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

1°) Calculer $\cos 2x$.

……………………………………………………………………………………………..……………………………..

……………………………………………………………………………………………..……………………………..

………..

2°) Calculer $\cos\dfrac{x}{2}$ sachant que $x \in [\pi ; 3\pi]$.

……………………………………………………………………………………………..……………………………..

……………………………………………………………………………………………..……………………………..

……………………………………………………………………………………………..……………………………..

………..

Corrigé du contrôle du 29-5-2019

I.

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel *n*, on ait $3u_{n+1}-2u_n=0$.

1°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

La relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) est équivalente à $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n$.

On reconnaît une relation de récurrence de la forme $u_{n+1}=qu_n$ avec $q=\frac{2}{3}$.

On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

Complément :

La relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n$ exprime que chaque terme de la suite, sauf le premier, s'obtient en multipliant le précédent par $\frac{2}{3}$ qui est un nombre fixe.

Une mauvaise méthode consisterait à calculer les premiers termes en fonction de u_0.

2°) Dans cette question, on suppose que $u_0=2$.

● Exprimer u_n en fonction de *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{(une seule égalité, sous forme quantifiée)}$$

On peut vérifier la formule écrite pour $n=0$.

Une autre écriture possible est $u_n=\frac{2^{n+1}}{3^n}$; elle ne présente cependant pas d'intérêt.

● Exprimer $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}u_k$ en fonction de *n* sous forme simplifiée.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n=6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] \quad \text{(une seule égalité, sous forme quantifiée)}$$

S_n est la somme de tous les termes de u_0 à u_n. Il y a $n+1$ termes.

On applique la formule $S_n=1^{\text{er}}\ \text{terme}\times\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n=2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=2\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}$$

$$=6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] \quad \text{(on ne peut pas aller plus loin)}$$

Il faut faire bien attention à écrire les parenthèses autour du $\frac{2}{3}$. On ne peut pas les enlever.

On ne peut pas simplifier la formule obtenue.

Il peut être intéressant de tester la formule.
Par exemple, pour $n=0$, $S_0=u_0=2$.

Si l'on applique la formule obtenue pour $n=0$, on obtient $6\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1}\right]=6\times\frac{1}{3}=2$.

On peut écrire $S_n=\sum\limits_{k=0}^{k=n}\left(2\times\left(\frac{2}{3}\right)^k\right)$.

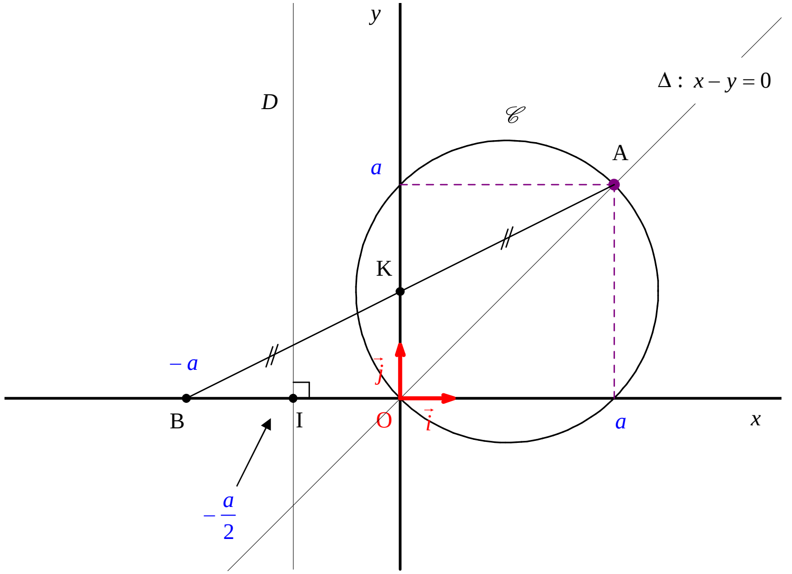
Dans les exercices **II** et **III**, le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On effectuera deux graphiques au brouillon. On n'hésitera pas à faire toutes les vérifications possibles.

II.

On note Δ la droite d'équation $x-y=0$. On considère un réel *a* non nul. On note A le point de Δ d'abscisse *a* et B le point de coordonnées $(-a\,;0)$.

Faire un graphique pour une valeur de *a* choisie (strictement positive). Les questions sont indépendantes.



1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[\text{OA}]$.
On attend une rédaction correcte.

Tout d'abord, il faut noter que le point A a pour coordonnées $(a\,;a)$.

1ère méthode : On utilise l'orthogonalité. C'est la meilleure méthode.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$.

$\text{M} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MO}} \cdot \overrightarrow{\text{MA}} = 0$ (ligne sans coordonnées ; facultative)

$\Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{\text{OM}}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{\text{AM}}\right) = 0$ (ligne sans coordonnées ; facultative)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{\text{AM}} = 0$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow x \times (x-a) + y \times (y-a) = 0$ (on calcule à part les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{OM}}$ et $\overrightarrow{\text{AM}}$)

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - ax - ay = 0$

$\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - ax - ay = 0$.

On écrit plutôt *ax* et *ay* que *xa* et *ya*.

2e méthode : On calcule les coordonnées du centre et le rayon de $\mathscr{C}$. Cette méthode est à éviter car elle nécessite davantage de calculs.

2°) Déterminer les coordonnées du milieu K de $[\text{AB}]$.

$\left(0\,;\dfrac{a}{2}\right)$ (une seule réponse, sans justifier)

On applique la formule des coordonnées d'un milieu : K $\begin{vmatrix} x_{\text{K}} = \dfrac{x_{\text{A}} + x_{\text{B}}}{2} = \dfrac{a-a}{2} = 0 \\ y_{\text{K}} = \dfrac{y_{\text{A}} + y_{\text{B}}}{2} = \dfrac{a+0}{2} = \dfrac{a}{2} \end{vmatrix}$.

On vérifie ce résultat graphiquement.

3°) Exprimer la distance OB en fonction de *a*.

$|\,a\,|$ (une seule réponse sous forme d'une égalité, sans justifier)

$\text{OB} = |\,x_{\text{B}}\,| = |-a| = |\,a\,|$ (propriété de la valeur absolue utilisée à la fin)

4°) Déterminer une équation de la médiatrice D de $[\text{OB}]$.

$x = -\dfrac{a}{2}$ (une seule réponse, sans justifier)

Par définition, D est la droite passant par le milieu de $[\text{OB}]$ passant par le milieu de $[\text{OB}]$.

On peut donc dire que $D \perp (\text{O}x)$.

Or comme le repère est orthonormé, $(\text{O}x) \perp (\text{O}y)$.

On en déduit que $D\,//\,(\text{O}y)$.

Par conséquent, D admet une équation de la forme $x = \text{constante}$.

On détermine la constante grâce aux coordonnées du milieu de $[\text{OB}]$: I $\begin{vmatrix} x_{\text{I}} = \dfrac{x_{\text{O}} + x_{\text{B}}}{2} = \dfrac{0-a}{2} = -\dfrac{a}{2} \\ y_{\text{I}} = \dfrac{y_{\text{O}} + y_{\text{B}}}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0 \end{vmatrix}$.

On en déduit que D a pour équation $x = -\dfrac{a}{2}$.

On vérifie graphiquement cette équation.

Il n'y a pas besoin d'introduire de point.

On se sert uniquement des coordonnées du milieu.

III.

On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 25$.

1°) Préciser le centre et le rayon de $\mathscr{C}$. Répondre directement par une phrase correctement rédigée. Tracer $\mathscr{C}$.

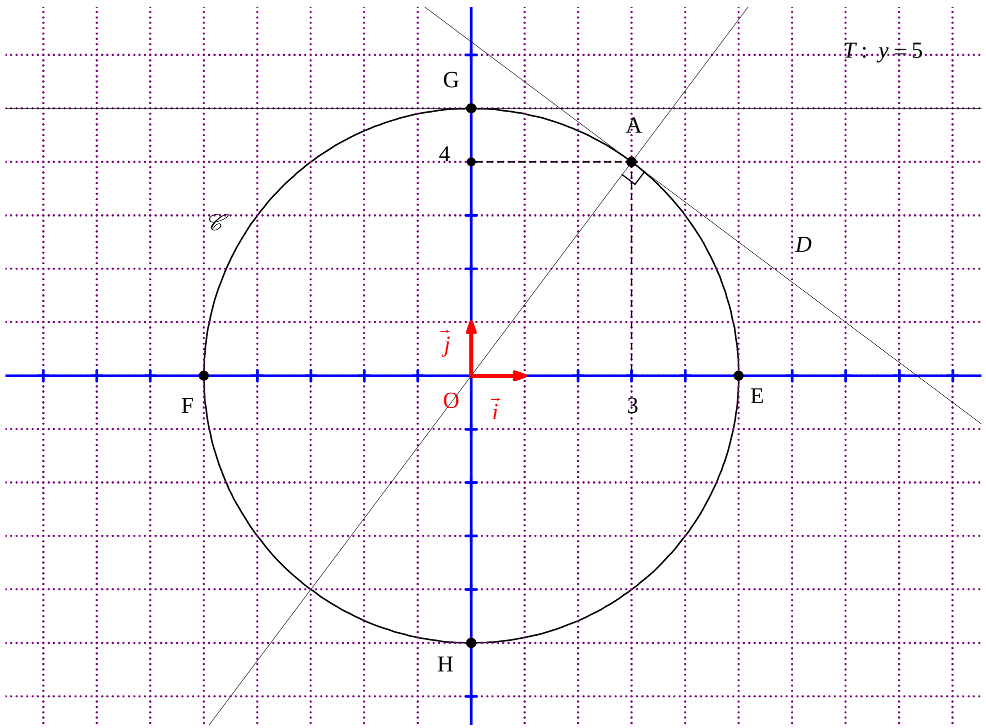
On sait que $x^2 + y^2 = R^2$ où R est un réel strictement positif est l'équation d'un cercle de centre O et de rayon R.

L'égalité $x^2 + y^2 = 25$ peut s'écrire $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2$.

On sait que le point O, origine du repère, a pour coordonnées $(0\,;0)$.

Il n'y a pas besoin d'introduire un nouveau point pour le centre puisque l'on sait que le point O a pour coordonnées $(0\,;0)$.

On en déduit que $\mathscr{C}$ est $\boxed{\text{le}}$ cercle de centre O et de rayon 5.



2°) On note E et F les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses, E étant d'abscisse positive et F d'abscisse négative. On note également G et H les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées, G étant d'ordonnée positive et H d'ordonnée négative. Placer ces points sur le graphique.
Tracer la tangente T en G à $\mathscr{C}$ puis écrire une équation de T.

$y = 5$ (une seule réponse, sans justifier)

3°) Déterminer un point A de $\mathscr{C}$ à coordonnées entières, distinct de E, F, G, H. On complètera sans justifier la phrase suivante.

Le point A de coordonnées $(3\,;4)$ appartient à $\mathscr{C}$.

En effet, on a $3^2 + 4^2 = 25$.

On peut aussi donner les points de coordonnées $(4\,;3)$, $(-3\,;4)$, $(-4\,;3)$, $(-3\,;-4)$, $(-4\,;-3)$, $(3\,;-4)$, $(4\,;-3)$. Il y a 8 points à coordonnées entières sur le cercle $\mathscr{C}$.

Rappeler la définition de la tangente D en A à $\mathscr{C}$ puis déterminer une équation cartésienne de D.

D est la perpendiculaire à la droite (OA) passant par A.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in D &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &\Leftrightarrow 3\times(x-3) + 4\times(y-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3x + 4y - 25 = 0 \end{aligned}$$

D a pour équation cartésienne $3x + 4y - 25 = 0$.

On peut dire que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ est un vecteur normal à D.

Le tableau ci-dessous donne les équations cartésiennes obtenues pour les autres choix.

Point choisi	Équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point
$(3\,;4)$	$3x + 4y - 25 = 0$
$(4\,;3)$	$4x + 3y - 25 = 0$
$(-3\,;4)$	$-3x + 4y - 25 = 0$
$(-4\,;3)$	$-4x + 3y - 25 = 0$
$(-3\,;-4)$	$-3x - 4y - 25 = 0$
$(-4\,;-3)$	$-4x - 3y - 25 = 0$
$(3\,;-4)$	$3x - 4y - 25 = 0$
$(4\,;-3)$	$4x - 3y - 25 = 0$

Plus généralement, si I est un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x_0\,;\,y_0)$, on peut démontrer que la tangente en ce point a pour équation $xx_0+yy_0-25=0$ (règle de dédoublement des termes).

IV.

Une société de location de voiture propose à ses clients deux contrats de location : un contrat de courte durée (inférieure à 2 jours) et un contrat de longue durée (de 3 à 7 jours). Le directeur de cette société affirme que 80 % des clients demandent un contrat de courte durée.
On travaillera avec des fractions qu'il n'est pas nécessaire de rendre irréductibles.

> Il s'agit d'un exercice d'échantillonnage (prise de décision ou test d'hypothèse) utilisant la loi binomiale.

1°) Dans cette question, on suppose que l'affirmation du directeur est correcte c'est-à-dire que la proportion de contrats de courtes durée est $p=0{,}8$ (hypothèse H).
Déterminer un intervalle de fluctuation I au seuil approximatif de 95 % de la fréquence des contrats de courte durée pour un échantillon aléatoire de taille 600.
Écrire l'intervalle I sur la ligne ci-dessous en écrivant les bornes sous forme fractionnaire (inutile d'écrire des fractions irréductibles).

$$\mathrm{I}=\left[\frac{461}{600}\,;\frac{499}{600}\right]$$ (une seule réponse)

Il s'agit d'une égalité d'ensembles.

On utilise la loi binomiale de paramètres $n=600$ et $p=0{,}8$.
La variable aléatoire X qui représente le nombre de contrats de courte durée suit la loi binomiale de paramètres $n=600$ et $p=0{,}8$.

Quelles vérifications peut-on faire ?

Il y a trois vérifications possibles.

- On vérifie que $p\in\mathrm{I}$.

- On peut aussi effectuer une vérification avec la formule de l'intervalle asymptotique $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

- On peut calculer $P\left(\frac{\mathrm{X}}{600}\in\left[\frac{461}{600}\,;\frac{499}{600}\right]\right)$ et vérifier que le résultat est proche de 0,95. On a noté P la probabilité considérée dans le cadre de l'expérience aléatoire.

À ce stade, on ne peut pas dire si l'hypothèse H est à rejeter ou non (on évite de dire que l'hypothèse H est vraie ou fausse). Le test d'hypothèse n'intervient que dans la question 3°).
Le terme « hypothèse » est pris dans son sens statistique.

2°) Sur les 600 derniers contrats signés l'année précédente, 550 étaient des contrats de courte durée.
Quelle est la fréquence f de contrats de courte durée observée dans cet échantillon ?

$$f=\frac{550}{600}$$ (une seule réponse)

On laisse f en écriture fractionnaire, sans chercher à simplifier. Cela facilite la réponse pour la question 3°).

3°) Que peut-on penser de l'affirmation du directeur ? Justifier avec précision en utilisant les résultats du 1°).

On constate $f\notin\mathrm{I}$ donc on rejette l'affirmation du directeur au seuil de 95 %.

V.

Soit x un réel tel que $\cos x=-\frac{1}{3}$. Les deux questions sont indépendantes l'une de l'autre.

> $-\frac{1}{3}$ n'est pas une valeur remarquable du cosinus.
>
> Il est fondamental de ne pas confondre x et $-\frac{1}{3}$. On ne peut pas « assimiler » x et $-\frac{1}{3}$.

1°) Calculer $\cos 2x$.

$$\begin{aligned}\cos 2x&=2\cos^2 x-1\\&=2\times(\cos x)^2-1\\&=2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1\\&=\frac{2}{9}-1\\&=-\frac{7}{9}\end{aligned}$$

2°) Calculer $\cos\frac{x}{2}$ sachant que $x\in[\pi\,;3\pi]$.

On écrit $x=2\times\frac{x}{2}$. On applique ensuite la formule de duplication $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ en prenant $a=\frac{x}{2}$ (changement de variable).

On a $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$.

En tenant compte de la valeur du cosinus de x, on obtient $-\frac{1}{3}=2\cos^2\frac{x}{2}-1$.

Cette égalité donne alors $2\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2}{3}$ et enfin $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$.

On utilise ensuite l'information $x\in[\pi\,;3\pi]$ qui permet de dire que $\frac{x}{2}\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right]$.

Le cercle trigonométrique permet alors de dire immédiatement que $\cos\frac{x}{2} \leqslant 0$.

Par conséquent, $\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ soit $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.