TS1 spé

Contrôle du jeudi 23 mai 2019 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 3 points)

1°) **Question de cours**

Soit p un nombre premier et a un entier relatif.
Préciser le PGCD de a et p.

………

………

2°) **Application**

Soit n un entier naturel quelconque.
Déterminer $\text{PGCD}\left(n^2+2n+1\,;3n+3\right)$ suivant les valeurs de n.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point + 3 points 3°) 2 points)

1°) **Question de cours**

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère r nombres premiers p_1, p_2, …, p_r deux à deux distincts.
On considère également r entiers naturels α_1, α_2, … α_r quelconques.
On pose $n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times\ldots\times p_r^{\alpha_r}$.
Exprimer en fonction de α_1, α_2, … α_r le nombre de diviseurs positifs de n.

……………………………………………………………… (une seule réponse, sans égalité)

2°) **Application 1**

On pose $n=126$.

• À l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers de n, déterminer le nombre de diviseurs positifs de n.

………………… (une seule réponse, sans égalité)

• Déterminer les trois plus petits multiples positifs de n ayant exactement 24 diviseurs positifs.

……………………………………………………………………………… (écrire les valeurs, sans expliquer)

3°) **Application 2**

Soit p un nombre premier quelconque.
Quel est le nombre de diviseurs positifs de $2p$?

………

………

………

………

………

………

………

III. (3 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, l'entier $n!+k$ n'est pas premier.
On pourra noter a_k le produit de tous les entiers naturels de 1 à n sauf k.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

IV. (2 points)

Pour tout entier naturel n, on pose $f(n)=2n^2+5$.
On donne l'algorithme suivant :

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $f(n)$ est premier **Faire**
    n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

Quel nombre obtient-on en sortie ?

……… (une seule réponse, sans égalité)

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) Écrire la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $\mathrm{N}=19992$.

……………………………………………… (une seule égalité)

2°) En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres $\mathrm{N'}=19992^2$ et $\mathrm{N''}=19992\underbrace{00\ldots0}_{\text{2019 fois le chiffre 0}}$.

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 23-5-2019

I.

1°) Question de cours

Soit p un nombre premier et a un entier relatif.
Préciser le PGCD de a et p.

• Si p divise a, alors $\text{PGCD}(a\,;\,p) = p$.

• Si p ne divise pas a, alors $\text{PGCD}(a\,;\,p) = 1$.

2°) Application

Soit n un entier naturel quelconque.
Déterminer $\text{PGCD}\left(n^2+2n+1\,;\,3n+3\right)$ suivant les valeurs de n.

On a $n^2+2n+1=(n+1)^2$ et $3n+3=3(n+1)$.

Par propriété du PGCD, comme $n+1$ est un entier naturel non nul, on peut écrire
$\text{PGCD}\left(n^2+2n+1\,;\,3n+3\right)=(n+1)\text{PGCD}(n+1\,;\,3)$.

Pour déterminer $\text{PGCD}(n+1\,;\,3)$, on utilise la propriété rappelée dans le 1°).

• Si $n+1$ est divisible par 3, alors $\text{PGCD}\left(n^2+2n+1\,;\,3n+3\right)=3(n+1)$.

• Si $n+1$ n'est pas divisible par 3, alors $\text{PGCD}\left(n^2+2n+1\,;\,3n+3\right)=n+1$.

Pour traduire la condition « $n+1$ est divisible par 3 », on peut introduire un entier relatif k et dire que « n est de la forme $3k-1$ avec $k\in\mathbb{Z}$ ».

On peut aussi introduire des congruences.

Si n est un entier relatif distinct de – 1, on peut écrire $\text{PGCD}\left(n^2+2n+1\,;\,3n+3\right)=\left|\,n+1\right|\text{PGCD}(n+1\,;\,3)$. On a ensuite les deux mêmes cas.

II.

1°) Question de cours

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On considère r nombres premiers p_1, p_2, …, p_r deux à deux distincts.
On considère également r entiers naturels α_1, α_2, … α_r quelconques.
On pose $n = {p_1}^{\alpha_1}\times {p_2}^{\alpha_2}\times\ldots\times {p_r}^{\alpha_r}$.
Exprimer en fonction de α_1, α_2, … α_r le nombre de diviseurs positifs de n.

$(\alpha_1+1)\times(\alpha_2+1)\times\ldots\times(\alpha_r+1)$ (une seule réponse, sans égalité)

On peut aussi écrire $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(\alpha_k+1)$.

2°) Application 1

On pose $n=126$.

• À l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers de n, déterminer le nombre de diviseurs positifs de n.

12 (une seule réponse, sans égalité)

La décomposition en facteurs premiers de 126 est $126=2\times3^2\times7$.

• Déterminer les trois plus petits multiples positifs de n ayant exactement 24 diviseurs positifs.

504 ; 630 ; 756 (écrire les valeurs, sans expliquer)

Les multiples strictement positifs de n sont n, $2n$, $3n$, $4n$,$5n$ … On teste ces multiples en utilisant leur décomposition en facteurs premiers.
Le nombre 24 comme produit d'entiers naturels strictement supérieurs à 1 :
$24=3\times2\times4$
$24=3\times2\times2\times2$

$504=2^3\times3^2\times7$ $\longrightarrow$ nombre de diviseurs positifs : $4\times3\times2=24$

$630=2\times3^2\times5\times7$ $\longrightarrow$ nombre de diviseurs positifs : $2\times3\times2\times2=24$

$756=2^2\times3^3\times7$ $\longrightarrow$ nombre de diviseurs positifs : $3\times4\times2=24$

Il faut se référer à la décomposition en facteurs premiers.

3°) Application 2

Soit p un nombre premier quelconque.
Quel est le nombre de diviseurs positifs de $2p$?

Il faut discuter suivant les valeurs de p.

• 1$^{\text{er}}$ cas : $p=2$

Dans ce cas, $2p=4$.

Dans ce cas, $2p$ admet exactement 3 diviseurs positifs (1, 2, 4).

• 2$^{\text{e}}$ cas : $p>2$

Dans ce cas, $2p$ admet exactement 4 diviseurs positifs (1, 2, p, $2p$).

Dans ce dernier cas, on peut utiliser ou non la formule rappelée dans le 1°).

III.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Démontrer que pour tout entier naturel k tel que $2 \leqslant k \leqslant n$, l'entier $n!+k$ n'est pas premier.
On pourra noter a_k le produit de tous les entiers naturels de 1 à n sauf k.

On commence par déterminer une expression factorisée de $n!+k$.

On sait que k est un entier naturel tel que $2 \leqslant k \leqslant n$.

On peut donc écrire :

$$n!+k = a_k \times k + k$$

$$= k \times (a_k + 1)$$

Or a_k est un produit d'entiers naturels tous supérieurs ou égaux à 1 donc a_k est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Par conséquent, $a_k + 1$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$n!+k$ s'écrit donc comme produit de deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On en déduit que $n!+k$ n'est pas un nombre premier.

IV.

Pour tout entier naturel n, on pose $f(n) = 2n^2 + 5$.
On donne l'algorithme suivant :

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $f(n)$ est premier **Faire**
    n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

Quel nombre obtient-on en sortie ?

5 (une seule réponse, sans égalité)

On ne peut pas programmer cet algorithme sur la calculatrice. Il faut créer une fonction (au sens de la programmation) qui permette de détecter si un nombre est premier.

On peut faire une table de valeurs de f sur la calculatrice.

On fait tourner l'algorithme « à la main ».

V.

1°) Écrire la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $N = 19992$.

$$N = 2^3 \times 3 \times 7^2 \times 17 \text{ (une seule égalité)}$$

2°) En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres $N' = 19992^2$ et $N'' = 19992\underbrace{00\ldots0}_{\text{2019 fois le chiffre 0}}$.

On reprend la décomposition en facteurs premiers trouvée à la question 1°).

$$N' = N^2$$
$$= \left(2^3 \times 3 \times 7^2 \times 17\right)^2$$
$$= 2^6 \times 3^2 \times 7^4 \times 17^2$$

$$N'' = N \times 10^{2019}$$
$$= 2^3 \times 3 \times 7^2 \times 17 \times (2 \times 5)^{2019}$$
$$= 2^{2022} \times 3 \times 5^{2019} \times 7^2 \times 17$$