1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du mercredi 15 mai 2019 (3 heures)

● Le barème est donné sur 40.

● Le soin apporté à la présentation et à la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

● L'énoncé est à conserver et ne doit pas être rendu dans la copie.

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) **Question de cours**

Rappeler l'expression simplifiée, pour n entier naturel quelconque, de la somme $0+1+2+3+\ldots+n$ (somme de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à n).

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + (-1)^n$ pour tout entier naturel n.

Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{2019}$.

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + 2u_n = 0$.

1°) Calculer u_0 sachant que $u_0^{\,2} + 3u_1 + 9 = 0$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

III. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto a\cos^2 x + b\sin^2 x + c$ définie sur $\mathbb{R}$ où a, b, c sont trois réels.

Les trois questions sont indépendantes.

1°) Calculer a, b, c sachant qu'ils vérifient les conditions :
C_1 : a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ;
C_2 : $f(0) = 2$;
C_3 : $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

2°) On suppose dans cette question que $a = 4$, $b = -2$, $c = 1$.
Exprimer $f(x)$ en fonction de $\cos 2x$.

3°) On suppose dans cette question que $a = b$ (c étant quelconque).
Démontrer que f est constante.

IV. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) Soit x un réel tel que $\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Calculer $\cos 2x$ et $\cos 4x$.

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel quelconque fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2(u_n)^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel afin que, pour tout réel a et tout entier naturel $p \geqslant 1$ saisis en entrée, la valeur affichée en sortie soit égale à u_p.
On précise que les variables qui interviennent sont a, u, p et i avec a et u réels, p et i entiers naturels.

Entrée :
Saisir *a*
Saisir *p*

Initialisation :
u prend la valeur *a*

Traitement :
Pour *i* allant de 0 à …….. **Faire**

u prend la valeur …………………

FinPour

Sortie :
Afficher *u*

On répondra sur la copie en recopiant uniquement les deux lignes d'instructions concernées.

3°) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.

Calculer $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

4°) Dans cette question, on suppose que $a = \cos x$ où x est un réel quelconque fixé.

Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et de x pour tout entier naturel n.
Il est conseillé de calculer d'abord u_1, u_2, u_3, u_4 ...

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

Une compagnie aérienne assure une ligne régulière avec un avion d'une capacité de 300 passagers. Les clients réservent gratuitement leur place, sans obligation d'achat et sans pénalité en cas de non présentation.
La compagnie estime à 0,1 la probabilité qu'un client ayant réservé sa place ne se présente pas à l'embarquement.

Pour optimiser son remplissage, la compagnie décide d'accepter plus de 300 réservations. On note *n* le nombre de réservations proposées par la compagnie, *n* étant un entier naturel strictement supérieur à 300. Ce faisant, la compagnie court le risque que se présentent à l'embarquement plus de 300 personnes ayant réservé. On considère que toutes les places proposées à la réservation sont effectivement réservées.

On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de passagers ayant réservé et se présentant à l'embarquement.

On suppose que les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres.

1°) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres. Exprimer son espérance et sa variance en fonction de *n*.

2°) Si la compagnie accepte 330 réservations, quelle est la probabilité qu'au moins 310 personnes se présentent à l'embarquement ? On donnera la valeur arrondie au millième.

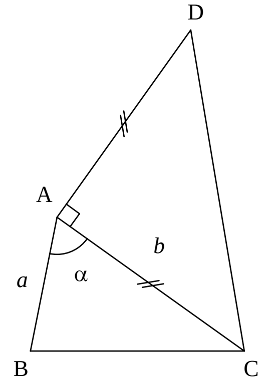
3°) Déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que l'espérance de X soit strictement supérieure à 300.

4°) On suppose que *n* est quelconque strictement supérieur à 300.
Le prix du billet s'élève à 90 euros. Les voyageurs ayant une place dans l'avion règlent cette somme avant l'embarquement. Pour les voyageurs qui arrivent alors que l'avion est déjà complet, ils ne paient rien et la compagnie prévoit un dédommagement forfaitaire de 45 euros pour les désagréments subis.
Exprimer en fonction de X la recette R en euros que gagne la compagnie à chaque vol. On distinguera deux cas suivant X.
Bonus : Écrire l'espérance de R à l'aide du symbole Σ en utilisant les valeurs de $P(\mathrm{X}=k)$.
En utilisant la commande de calcul d'une somme de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de l'espérance de R pour $n=330$. Interpréter concrètement le résultat obtenu.

5°) On suppose toujours que *n* est quelconque strictement supérieur à 300.
On note p_n la probabilité qu'au moins une personne ne puisse pas embarquer. On a donc $p_n = P(\mathrm{X}>300)$.
Grâce à la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (p_n) et déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $p_n \geqslant 0{,}95$.

VI. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

Soit ABC un triangle quelconque du plan *P* tel que l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ ne soit pas obtus. On construit le point D tel que le triangle ACD soit situé extérieurement au triangle ABC et soit isocèle rectangle en A. On pose $\mathrm{AB}=a$ et $\mathrm{AC}=b$ (*a* et *b* étant deux réels strictement positifs). On note également α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ ($\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$).



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

1°) Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est égal à :

① $ab\cos\alpha$ ② $ab\sin\alpha$ ③ $-ab\cos\alpha$ ④ $-ab\sin\alpha$

Justifier la réponse choisie par un calcul.

2°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ en fonction de *a*, *b*, α sous la forme la plus simple possible.

3°) Exprimer BD^2 en fonction de *a*, *b*, α.
En déduire BD lorsque $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Cette expression était-elle prévisible ? Expliquer.

VII. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit A et B deux points fixés du plan *P*. On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.

1°) Recopier et compléter l'égalité suivante :

$$« \ \forall \mathrm{M}\in P \quad \overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}=2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{....}\right) \ »$$

Justifier avec soin.

2°) On suppose dans cette question que A et B sont distincts.

Déterminer et tracer l'ensemble *E* des points M de *P* tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

VIII. (9 points)

Dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$, on note Δ la droite d'équation $y=x$.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1 (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

1°) Quelle la nature de la courbe Γ d'équation $x^2+y^2=14$? Répondre avec précision.

2°) Le point $E\left(2+\sqrt{3}\,;2-\sqrt{3}\right)$ appartient-il à Γ ?

3°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J de Γ et Δ.

Partie 2 (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point)

Dans cette partie, *a* désigne un réel quelconque non nul. On note A le point de Δ d'abscisse *a* et B le point de coordonnées $(-a\,;0)$.

1°) Calculer OA^2 en fonction de *a*.

2°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[\mathrm{AB}]$.

3°) Calculer la valeur exacte de $\cos\widehat{\mathrm{OAB}}$.

4°) Soit *D* une droite perpendiculaire à (AB).
Quel est son coefficient directeur ?

5°) **Bonus :**

Déterminer les coordonnées du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle OAB.
Quelle est la nature du triangle ΩAB ? On répondra de manière précise.

Conseils donnés à l'oral

Au brouillon, on pourra ne pas écrire de rédaction (ou d'écrire une rédaction minimale).

En revanche, sur la copie, on s'efforcera de rédiger en faisant des phrases courtes avec sujet, verbe, complément (pas de pronom).

Corrigé du contrôle du 15-5-2019

I.

1°) **Question de cours**

Rappeler l'expression simplifiée, pour n entier naturel quelconque, de la somme $0+1+2+3+\ldots+n$ (somme de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à n).

$$0+1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

La somme $0+1+2+3+\ldots+n$ s'écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k$.

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2n+(-1)^n$ pour tout entier naturel n.
Calculer $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{2019}$.

La suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

Il n'y a pas de formule sommatoire à appliquer.

$$S=2\times0+(-1)^0+2\times1+(-1)^1+2\times2+(-1)^2+\ldots+2\times2019+(-1)^{2019}$$
$$S=2\times\underbrace{(0+1+2+\ldots+2019)}_{\text{Formule du 1°)}}+\underbrace{1-1+1-1+\ldots+1-1}_{\text{2020 termes}}$$

$$S=\cancel{2}\times\frac{2019\times2020}{\cancel{2}}+0+0+\ldots+0$$
$$S=4078380$$

① On peut aussi utiliser la calculatrice directement.

② Autre méthode :

On calcule les premiers termes de la suite.

$u_0=2\times0+(-1)^0$ $=1$	$u_1=2\times1+(-1)^1$ $=1$	$u_2=2\times2+(-1)^2$ $=5$	$u_3=2\times3+(-1)^3$ $=5$

On peut démontrer que $\forall p\in\mathbb{N}\quad u_{2p}=u_{2p+1}$. On utilise ensuite ce résultat pour calculer la somme (avec la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique).

③ La formule donnant la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique fonctionne ici mais c'est un coup de chance lié au fait que la somme des termes extrêmes est constante.

④ On peut aussi utiliser le symbole Σ en coupant la somme en deux.

II.

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}+2u_n=0$.

1°) Calculer u_0 sachant que $u_0^{\,2}+3u_1+9=0$.

La relation de récurrence écrite pour $n=0$ donne $u_1+2u_0=0$. On a donc $u_1=-2u_0$.

En remplaçant dans l'égalité vérifiée par u_0 et u_1, on obtient $u_0^{\,2}-6u_0+9=0\quad(1)$.

$(1)\Leftrightarrow(u_0-3)^2=0$

$\Leftrightarrow u_0-3=0$

$\Leftrightarrow u_0=3$

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$.
Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=-2u_n$ donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison – 2.

S_n est la somme de tous les termes de u_0 à u_n. Il y a $n+1$ termes.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad S_n=u_0\times\frac{1-(-2)^{n+1}}{1+2}$$
$$=\cancel{3}\times\frac{1-(-2)^{n+1}}{\cancel{3}}$$
$$=1-(-2)^{n+1}\qquad\text{(on ne peut pas aller plus loin)}$$

Il faut faire bien attention à écrire les parenthèses autour du – 2. On ne peut pas les enlever.
On ne peut pas simplifier la formule obtenue en $1+(-2)^{n+1}$.

Il peut être intéressant de tester la formule.
Par exemple, pour $n=0$, $S_0=u_0=3$.

Si l'on applique la formule obtenue pour $n=0$, on obtient $1-(-2)^{0+1}=1+2=3$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto a\cos^2 x + b\sin^2 x + c$ définie sur $\mathbb{R}$ où a, b, c sont trois réels.

Les trois questions sont indépendantes.

1°) Calculer a, b, c sachant qu'ils vérifient les conditions :
C_1 : a, b, c sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ;
C_2 : $f(0) = 2$;
C_3 : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

C_1 se traduit par $b = \dfrac{a+c}{2}$ (1) [ou encore $2b = a + c$ $(1')$].

Une mauvaise traduction de C_1 consiste à écrire $a < b < c$ ou $c < b < a$.

La condition C_2 se traduit par $a\cos^2 0 + b\sin^2 0 + c = 2$ soit $a + c = 2$ (2).

On sait que $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. Il s'agit de valeurs remarquables que l'on peut retrouver grâce au cercle trigonométrique ou à la calculatrice.

Grâce à (1), on obtient $b = \dfrac{2}{2} = 1$. Ainsi $f(x) = a\cos^2 x + \sin^2 x + c$.

La condition C_3 se traduit par $a\cos^2 \dfrac{\pi}{4} + \sin^2 \dfrac{\pi}{4} + c = 1$ ce qui donne $a \times \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + c = 1$ (3).

On sait que $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Il s'agit de valeurs remarquables que l'on peut retrouver grâce au cercle trigonométrique ou à la calculatrice.

$$\begin{aligned}(3) &\Leftrightarrow \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + c = 1\\ &\Leftrightarrow \frac{a}{2} + c = \frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow a + 2c = 1 \quad (3')\end{aligned}$$

On résout le système formé par les équations (2) et $(3')$ c'est-à-dire $a + c = 2$ et $a + 2c = 1$

Par soustraction membre à membre, on obtient $c = -1$.

(2) donne alors immédiatement $a = 3$.

Finalement, on obtient : $a = 3$, $b = 1$, $c = -1$.

Autre méthode :

On prend le système d'équations formé par $(1')$, (2), $(3')$ qui s'écrit $\begin{cases} 2b = a + c \\ a + c = 2 \\ a + 2c = 1 \end{cases}$.

Ce système est équivalent à $\begin{cases} a - 2b + c = 0 \\ a + c = 2 \\ a + 2c = 1 \end{cases}$.

On résout ensuite ce système grâce à la calculatrice.

2°) On suppose dans cette question que $a = 4$, $b = -2$, $c = 1$.
Exprimer $f(x)$ en fonction de $\cos 2x$.

On utilise les formules de linéarisation qui découlent des formules de duplication de $\cos 2x$:
$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ et $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= 4\cos^2 x - 2\sin^2 x + 1\\ &= 2(1 + \cos 2x) - (1 - \cos 2x) + 1\\ &= 3\cos 2x + 2\end{aligned}$$

On a linéarisé $f(x)$.

3°) On suppose dans cette question que $a = b$ (c étant quelconque).
Démontrer que f est constante.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= a\cos^2 x + a\sin^2 x + c\\ &= a\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) + c\\ &= a + c \quad \text{(on utilise la relation fondamentale } \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1\text{)}\end{aligned}$$

On remarque que le résultat ne dépend pas de x.

On en déduit que la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Il est inutile de dire que sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

On ne dit pas que $f(x)$ est constante. On dit que f (tout court) est constante sur $\mathbb{R}$.

Attention à ne pas confondre que f et $f(x)$.

IV.

1°) Soit x un réel tel que $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Calculer $\cos 2x$ et $\cos 4x$.

Il est fondamental de ne pas confondre x et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. On ne peut pas assimiler x et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 2\cos^2 x - 1\\ &= 2\times(\cos x)^2 - 1\\ &= 2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1\\ &= 2\times\frac{1}{3} - 1\\ &= \frac{2}{3} - 1\\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

On écrit $4x = 2\times 2x$. On applique ensuite la formule de duplication $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ en prenant $a = 2x$ (changement de variable).

$$\begin{aligned}\cos 4x &= \cos(2\times 2x)\\ &= 2\cos^2(2x) - 1\\ &= 2\times(\cos 2x)^2 - 1\\ &= 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 \qquad \text{(on reprend le résultat de } \cos 2x \text{ que l'on a trouvé avant)}\\ &= 2\times\frac{1}{9} - 1\\ &= \frac{2}{9} - 1\\ &= -\frac{7}{9}\end{aligned}$$

2°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel quelconque fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2(u_n)^2 - 1$ pour tout entier naturel n.

Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel afin que, pour tout réel a et tout entier naturel $p \geqslant 1$ saisis en entrée, la valeur affichée en sortie soit égale à u_p.
On précise que les variables qui interviennent sont a, u, p et i avec a et u réels, p et i entiers naturels.

Entrée :
Saisir a
Saisir p

Initialisation :
u prend la valeur a

Traitement :
Pour i allant de 0 à $p-1$ **Faire**
    u prend la valeur $2u^2 - 1$
FinPour

Sortie :
Afficher u

On répondra sur la copie en recopiant uniquement les deux lignes d'instructions concernées.

De 0 à $p-1$, il y a p entiers naturels. La boucle compte donc p itérations.

3°) Dans cette question, on suppose que $a = 0$.

Calculer $P_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$, $u_4 = 1$ ...

On peut démontrer de proche en proche qu'à partir de l'indice 2, tous les termes sont égaux à 1.
Autrement dit, la suite (u_n) est stationnaire à partir de l'indice 2.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n = -1\times 1\times 1\times \ldots \times 1$$
$$= -1$$

4°) Dans cette question, on suppose que $a = \cos x$ où x est un réel quelconque fixé.

Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n et de x pour tout entier naturel n.
Il est conseillé de calculer d'abord u_1, u_2, u_3, u_4 ...

D'après la relation de récurrence, la suite (u_n) n'est manifestement ni arithmétique ni géométrique (sauf valeurs particulières de u_0).

$u_1 = u_{0+1}$	$u_2 = u_{1+1}$	$u_3 = u_{2+1}$	$u_4 = u_{3+1}$
$= 2(u_0)^2 - 1$	$= 2(u_1)^2 - 1$	$= 2(u_2)^2 - 1$	$= 2(u_3)^2 - 1$
$= 2\cos^2 x - 1$	$= 2\cos^2 2x - 1$	$= 2\cos^2 4x - 1$	$= 2\cos^2 8x - 1$
$= \cos 2x$	$= \cos(2\times 2x)$	$= \cos(2\times 4x)$	$= \cos 16x$
	$= \cos 4x$	$= \cos 8x$	

Pour le calcul de u_2, on applique la formule $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ avec $a = 2x$.

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \cos(2^n x)$.

Attention, les parenthèses autour de $2^n x$ sont obligatoires.

On peut démontrer ce résultat de proche en proche (ou par récurrence en Terminale).

V.

Une compagnie aérienne assure une ligne régulière avec un avion d'une capacité de 300 passagers. Les clients réservent gratuitement leur place, sans obligation d'achat et sans pénalité en cas de non présentation.
La compagnie estime à 0,1 la probabilité qu'un client ayant réservé sa place ne se présente pas à l'embarquement.

Pour optimiser son remplissage, la compagnie décide d'accepter plus de 300 réservations. On note n le nombre de réservations proposées par la compagnie, n étant un entier naturel strictement supérieur à 300. Ce faisant, la compagnie court le risque que se présentent à l'embarquement plus de 300 personnes ayant réservé. On considère que toutes les places proposées à la réservation sont effectivement réservées.

On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de passagers ayant réservé et se présentant à l'embarquement.

On suppose que les comportements des passagers sont indépendants les uns des autres.

Il s'agit d'un problème de surréservation ou « surbooking » en anglais.

1°) Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres. Exprimer son espérance et sa variance en fonction de n.

L'épreuve « se présenter à l'embarquement » est une épreuve de Bernoulli qui conduit soit à un succès de probabilité 0,9 soit à un échec de probabilité 0,1.

On répète cette épreuve n fois dans des conditions identiques indépendantes.

Il s'agit d'un schéma de Bernoulli.

X est la variable qui compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

[Pour tout entier $k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;n\}$, on a : $P(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} 0{,}1^k \times 0{,}9^{n-k}$.]

$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 0{,}9n$

$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = 0{,}9 \times 0{,}1 \times n = 0{,}09n$

2°) Si la compagnie accepte 330 réservations, quelle est la probabilité qu'au moins 310 personnes se présentent à l'embarquement ? On donnera la valeur arrondie au millième.

On suppose que $n = 330$ et on cherche $P(\mathrm{X} \geqslant 310)$.

1ère méthode : Utilisation de la commande binomFRép

Afin d'utiliser la calculatrice, on écrit $P(\mathrm{X} \geqslant 310) = 1 - P(\mathrm{X} \leqslant 309)$.

On trouve $P(\mathrm{X} \geqslant 310) = 0{,}007709358\ldots$.

Le résultat est un nombre décimal car p est un nombre décimal.

La valeur arrondie au millième de la probabilité qu'au moins 310 personnes se présentent à l'embarquement est 0,008.

Attention à ne pas écrire $P(\mathrm{X} \geqslant 310) = 0{,}008$. On peut à la rigueur écrire $P(\mathrm{X} \geqslant 310) \approx 0{,}008$.

2e méthode : Utilisation de la commande de calcul d'une somme sur la calculatrice

On écrit $P(\mathrm{X} \geqslant 310) = \sum_{k=310}^{k=330} P(\mathrm{X} = k)$.

3°) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que l'espérance de X soit strictement supérieure à 300.

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $\mathrm{E}(\mathrm{X}) > 300 \quad (1)$.

1ère méthode :

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $0{,}9n > 300$.

On utilise la calculatrice en rentrant la fonction $f : x$ 0,9x.

2e méthode :

On résout une inéquation.

$(1) \Leftrightarrow 0{,}9n > 300$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{300}{0{,}9}$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{3000}{9}$

$\Leftrightarrow n > \dfrac{1000}{3}$

Or $\dfrac{1000}{3} = 333{,}3333\ldots$

Le plus petit entier naturel n cherché est donc 334.

4°) On suppose que n est quelconque strictement supérieur à 300.
Le prix du billet s'élève à 90 euros. Les voyageurs ayant une place dans l'avion règlent cette somme avant l'embarquement. Pour les voyageurs qui arrivent alors que l'avion est déjà complet, ils ne paient rien et la compagnie prévoit un dédommagement forfaitaire de 45 euros pour les désagréments subis.
Exprimer en fonction de X la recette R en euros que gagne la compagnie à chaque vol. On distinguera deux cas suivant X.
Bonus : Écrire l'espérance de R à l'aide du symbole Σ en utilisant les valeurs de $P(\mathrm{X} = k)$.
En utilisant la commande de calcul d'une somme de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie au millième de l'espérance de R pour $n = 330$. Interpréter concrètement le résultat obtenu.

X : nombre de personnes se présentant à l'embarquement

On peut éventuellement prendre plusieurs valeurs de X pour mieux comprendre, par exemple $\mathrm{X}=280$, $\mathrm{X}=320$ …

1^{er} cas : $\mathrm{X} \leqslant 300$

Dans ce cas, toutes les personnes ont une place dans l'avion.

On a donc $\mathrm{R}=90\mathrm{X}$.

2^{e} cas : $\mathrm{X}>300$

Dans ce cas, seules les 300 premières personnes ont une place dans l'avion et paient donc les 90 € du billet ; les autres (dont le nombre est égal à $\mathrm{X}-300$) ne paient rien et reçoivent 45 €.

On a donc $\mathrm{R}=90\times 300-(\mathrm{X}-300)\times 45$.

En développant, on obtient $\mathrm{R}=40500-45\mathrm{X}$.

On note r_0, r_1, …, r_n les valeurs possibles de R.

Pour $0 \leqslant k \leqslant 300$, $r_k=90k$.

Pour $301 \leqslant k \leqslant n$, $r_k=40500-45k$.

D'après la formule de l'espérance d'une variable aléatoire, on peut écrire $\mathrm{E}(\mathrm{R})=\sum_{k=0}^{k=n}\left(r_k\times P(\mathrm{R}=r_k)\right)$.

Compte tenu de l'expression de R en fonction de X, on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{R})=\sum_{k=0}^{k=300}\left(90k\times P(\mathrm{X}=k)\right)+\sum_{k=301}^{k=n}\left((40500-45k)\times P(\mathrm{X}=k)\right).$$

On peut éventuellement écrire : $\mathrm{E}(\mathrm{R})=90\sum_{k=0}^{k=300}\left(k\times P(\mathrm{X}=k)\right)+\sum_{k=301}^{k=n}\left((40500-45k)\times P(\mathrm{X}=k)\right)$.

On suppose que $n=330$. On utilise la loi binomiale de paramètres $n=330$ et $p=0,9$.

Dans ce cas, $\mathrm{E}(\mathrm{R})=\sum_{k=0}^{k=300}\left(90k\times P(\mathrm{X}=k)\right)+\sum_{k=301}^{k=330}\left((40500-45k)\times P(\mathrm{X}=k)\right)$.

La calculatrice donne $\mathrm{E}(\mathrm{R})=26599,7602\ldots$ (la calculatrice met un peu de temps à charger le résultat).

On notera que $\mathrm{E}(\mathrm{R})$ est un nombre décimal.

La valeur arrondie au centième est 26599,76.

Concrètement, ce résultat donne une estimation de la recette moyenne sur un grand nombre d'épreuves.

5°) On suppose toujours que n est quelconque strictement supérieur à 300.
On note p_n la probabilité qu'au moins une personne ne puisse pas embarquer. On a donc $p_n=P(\mathrm{X}>300)$.
Grâce à la calculatrice, conjecturer le sens de variation de la suite (p_n) et déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n \geqslant 0,95$.

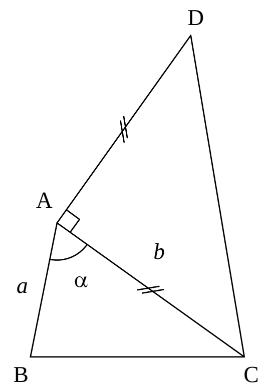
On ne cherche pas à exprimer p_n en fonction de n. Il n'existe pas de formule permettant d'obtenir une telle expression.
On utilise le mode « fonction » par commodité.

On rentre $\mathrm{Y1}=1-\mathrm{binomFRép}(\mathrm{X},0.9,299)$.

D'après le tableau de valeurs obtenu, la suite (p_n) est croissante et le plus petit entier naturel n tel que $p_n \geqslant 0,95$ est 344.

VI.

Soit ABC un triangle quelconque du plan P tel que l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ ne soit pas obtus. On construit le point D tel que le triangle ACD soit situé extérieurement au triangle ABC et soit isocèle rectangle en A. On pose $\mathrm{AB}=a$ et $\mathrm{AC}=b$ (a et b étant deux réels strictement positifs). On note également α la mesure en radians de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ ($\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right]$).



Il est demandé de ne rien écrire sur la figure.

1°) Le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ est égal à :

① $ab\cos\alpha$ ② $ab\sin\alpha$ ③ $-ab\cos\alpha$ ④ $-ab\sin\alpha$

Justifier la réponse choisie par un calcul.

On applique la définition du produit scalaire de deux vecteurs non nuls.
On observe tout d'abord que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ ont la même origine.

Pour la suite, on a besoin de s'intéresser à l'angle $\widehat{\mathrm{BAD}}$. On peut écrire $\widehat{\mathrm{BAD}}=\widehat{\mathrm{BAC}}+\widehat{\mathrm{CAD}}=\alpha+\frac{\pi}{2}$.

$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos \widehat{BAD}$

$= a \times b \times \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (parenthèses obligatoires après le cos)

$= a \times b \times (-\sin\alpha)$ (formule de trigonométrie $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$)

$= -ab\sin\alpha$

On peut retrouver cette formule grâce au cercle trigonométrique.

• On évite d'utiliser les normes puisqu'il s'agit de produits scalaires de vecteurs définis par des points.

• Il ne faut pas oublier que l'unité d'angle utilisée ici est le radian.

• Le signe du produit scalaire est négatif ce qui est cohérent puisque l'on observe que l'angle $\widehat{BAD}$ est obtus.

2°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD}$ en fonction de *a*, *b*, α sous la forme la plus simple possible.

On ne peut pas calculer directement ce produit scalaire. On utilise une méthode par décomposition.

① On peut écrire $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \bullet \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$

$= \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}$

$= 0 - \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}$ (comme le triangle ACD est rectangle en A, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux)

$= -\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}$

$= -ab\cos\alpha$

② Variante : On peut écrire $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles).

$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \bullet \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BA} + 0$ (comme le triangle ACD est rectangle en A, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux)

$= \overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BA}$

$= \overrightarrow{AC} \bullet \left(-\overrightarrow{AB}\right)$

$= -\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AB}$

$= -ab\cos\alpha$

Attention au calcul de $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BA}$. Les deux vecteurs n'ont pas la même origine.
Il faut transformer le vecteur $\overrightarrow{BA}$ en $-\overrightarrow{AB}$.

3°) Exprimer BD^2 en fonction de *a*, *b*, α.
En déduire BD lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. Cette expression était-elle prévisible ? Expliquer.

D'après la « formule du côté » (formule d'Al Kashi) dans le triangle ABD, on a :

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos \widehat{BAD}$

$= a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ($AD = AC = b$ puisque ACD est isocèle en A)

$= a^2 + b^2 + 2ab\sin\alpha$

Lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, l'égalité obtenue précédemment donne :

$BD^2 = a^2 + b^2 + 2ab\sin\dfrac{\pi}{2}$

$= a^2 + b^2 + 2ab$

$= (a+b)^2$

Par suite, $BD = \sqrt{(a+b)^2} = |\, a+b \,|$.

Comme *a* et *b* sont strictement positifs, $a+b$ est aussi strictement positif.
On en déduit que $BD = a+b$.

Ce résultat était prévisible. En effet, lorsque $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\widehat{BAD} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}$.
L'angle $\widehat{BAD}$ est plat donc les points B, A, D sont alignés dans cet ordre.
On a donc $BD = BA + AD = a+b$ (la longueur BD s'obtient en ajoutant les longueurs BA et AD).

VII.

Soit A et B deux points fixés du plan *P*. On note I le milieu de $[AB]$.

1°) Recopier et compléter l'égalité suivante :

« $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{AM} = 2\left(\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{....}\right)$ »

Justifier avec soin.

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA} \bullet \left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AM}\right)$ (on « factorise en utilisant la propriété suivant du produit scalaire $\vec{u} \bullet \vec{v} - \vec{u} \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \left(\vec{v} - \vec{w}\right)$)

$= \overrightarrow{MA} \bullet \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\right)$

$= \overrightarrow{MA} \bullet \left(2\overrightarrow{MI}\right)$

$= 2\left(\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MI}\right)$

On utilise la propriété fondamentale $\forall M \in P \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ car I est le milieu de $[AB]$ par hypothèse.
Cette propriété se démontre très facilement grâce à la relation de Chasles.

2°) On suppose dans cette question que A et B sont distincts.

Déterminer et tracer l'ensemble *E* des points M de *P* tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AM}$.

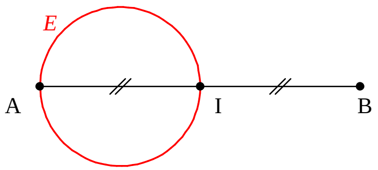
On utilise une chaîne d'équivalences en utilisant le résultat du 1°).

Soit M un point quelconque de *P*.

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \end{aligned}$$

À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), on doit formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

L'ensemble *E* est le cercle de diamètre $[AI]$.



VIII.

Dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note Δ la droite d'équation $y = x$.
Les deux parties sont indépendantes.

Partie 1

On peut éventuellement faire un graphique pour la partie 1.

1°) Quelle la nature de la courbe Γ d'équation $x^2 + y^2 = 14$? Répondre avec précision.

L'égalité $x^2 + y^2 = 14$ peut s'écrire $(x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{14}\right)^2$.

On sait que le point O, origine du repère, a pour coordonnées $(0\,;0)$.

On en déduit que Γ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{14}$.

2°) Le point $E\left(2+\sqrt{3}\,;2-\sqrt{3}\right)$ appartient-il à Γ ?

Attention, à bien respecter la démarche. On calcule $x_E{}^2 + y_E{}^2$.

$$\begin{aligned} x_E{}^2 + y_E{}^2 &= \left(2+\sqrt{3}\right)^2 + \left(2-\sqrt{3}\right)^2 \\ &= 7 + \cancel{4\sqrt{3}} + 7 - \cancel{4\sqrt{3}} \\ &= 14 \end{aligned}$$

On en déduit que $E \in \Gamma$.

3°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J de Γ et Δ.

Les abscisses des points d'intersection de Γ et Δ sont les solutions de l'équation $x^2 + x^2 = 14$ (1).

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2x^2 = 14 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 7 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{7} \text{ ou } x = -\sqrt{7} \end{aligned}$$

Les points d'intersection I et J de Γ et Δ ont pour abscisses respectives $\sqrt{7}$ et $-\sqrt{7}$.

On calcule les ordonnées de I et J en utilisant l'équation réduite de Δ.

$y_I = x_I = \sqrt{7}$ et $y_J = x_J = -\sqrt{7}$

L'équation dont les ordonnées de I et J sont solutions est $y^2 + y^2 = 14$. Elle n'est pas intéressante.

I et J ont donc pour coordonnées respectives $\left(\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\right)$ et $\left(-\sqrt{7}\,;-\sqrt{7}\right)$.

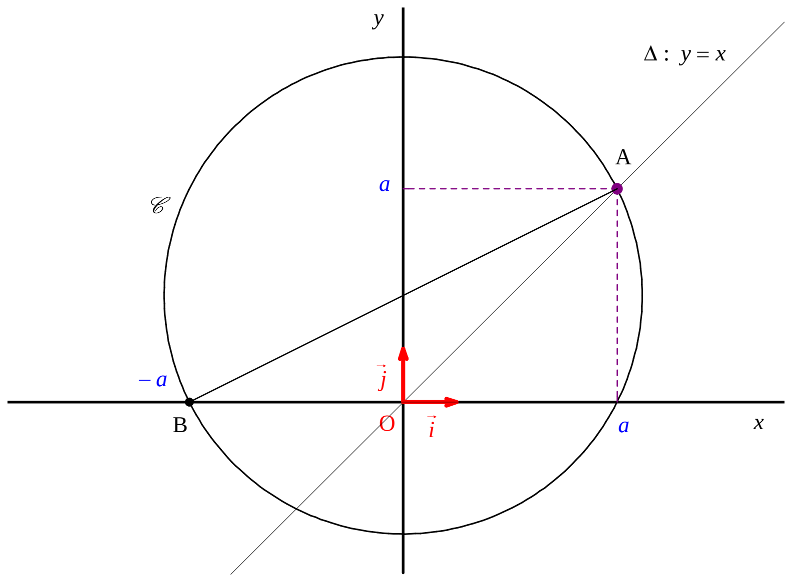
Variantes :

① Les ordonnées de I et J des points d'intersection de Γ et Δ sont les solutions de l'équation $y^2 + y^2 = 14$.
Après résolution, on calcule les abscisses grâce à l'équation réduite de Δ.

② On peut aussi passer par un système (non linéaire).

Partie 2

Dans cette partie, a désigne un réel quelconque non nul. On note A le point de Δ d'abscisse a et B le point de coordonnées $(-a\,;0)$.



1°) Calculer OA^2 en fonction de a.

On sait que $\text{A} \in \Delta$ et que $x_{\text{A}} = a$.
Or Δ a pour équation $y = x$ donc $y_{\text{A}} = x_{\text{A}} = a$.
Ainsi A a pour coordonnées $(a\,;a)$ donc $\text{OA}^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Le carré de la distance d'un point à l'origine du repère est égal à la somme des carrés des coordonnées.

2°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[\text{AB}]$.

1[ère] méthode : On utilise l'orthogonalité. C'est la meilleure méthode.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;y)$.

$\text{M} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{MA}} \cdot \overrightarrow{\text{MB}} = 0$ (ligne sans coordonnées, faire un graphique pour comprendre)

$\Leftrightarrow \left(-\overrightarrow{\text{AM}}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{\text{BM}}\right) = 0$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{BM}} = 0$ (ligne sans coordonnées)

$\Leftrightarrow (x-a)\times(x+a)+(y-a)\times y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - a^2 + y^2 - ay = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - ay - a^2 = 0$

$\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - ay - a^2 = 0$.

2[e] méthode : On calcule les coordonnées du centre et le rayon de $\mathscr{C}$. Cette méthode est à éviter car elle nécessite davantage de calculs.

3°) Calculer la valeur exacte de $\cos \widehat{\text{OAB}}$.

Il faut tout d'abord observer que l'angle $\widehat{\text{OAB}}$ correspond à l'angle géométrique des vecteurs $\overrightarrow{\text{AO}}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$.

On peut utilise la formule du cours $\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$ ou refaire la démarche comme dans la version proposée ci-dessous.

On a : $\cos \widehat{\text{OAB}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{AO}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}}}{\text{AO} \times \text{AB}}$ (car $\overrightarrow{\text{AO}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = \text{AO} \times \text{AB} \times \cos \widehat{\text{AOB}}$)

On calcule à part $\overrightarrow{\text{AO}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}}$.

$\overrightarrow{\text{AO}} \left| \begin{array}{l} -a \\ -a \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{\text{AB}} \left| \begin{array}{l} -2a \\ -a \end{array} \right.$

$\overrightarrow{\text{AO}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = -a \times (-2a) + (-a) \times (-a)$

$\overrightarrow{\text{AO}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 3a^2$

On calcule ensuite les distances AO et AB.

On reprend le résultat du 1°). $\text{AO} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{a^2} = |\,a\,|\sqrt{2}$ (attention à la présence de barres de valeur absolue indispensable).

On obtient de même $\text{AB} = |\,a\,|\sqrt{5}$.

Il faut bien penser à mettre les valeurs absolues qui proviennent de la formule $\sqrt{a^2} = |\,a\,|$.

$$\cos\widehat{\text{OAB}}=\frac{3a^2}{|\,a\,|\sqrt{2}\times|\,a\,|\sqrt{5}}$$
$$=\frac{3a^2}{a^2\sqrt{10}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

4°) Soit D une droite perpendiculaire à (AB).
Quel est son coefficient directeur ?

On commence par calculer le coefficient directeur de (AB) (il n'y a pas besoin de chercher une équation).

$$m=\frac{y_{\text{B}}-y_{\text{A}}}{x_{\text{B}}-x_{\text{A}}}$$
$$=\frac{0-a}{-a-a}$$
$$=\frac{-a}{-2a}$$
$$=\frac{\cancel{-a}\times 1}{\cancel{-a}\times 2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

On observe que le coefficient directeur de (AB) ne dépend pas de a.

On utilise la règle du produit des coefficients directeurs égal à – 1.

On note m le coefficient directeur de D.

Pour déterminer m, on utilise la règle du cours qui dit que dans un repère orthonormé, deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont orthogonales si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à – 1.

On a $m\times\frac{1}{2}=-1$ d'où $m=-2$.

5°) **Bonus :**

Déterminer les coordonnées du point Ω centre du cercle circonscrit au triangle OAB.

Le triangle OAB n'est pas rectangle. Le centre du cercle circonscrit n'est pas le milieu d'un côté.

Le centre du cercle circonscrit est le point d'intersection des médiatrices.

Faire un graphique avec les médiatrices.

On va chercher une équation de deux médiatrices. Le plus simple est de choisir la médiatrice de $[\text{OB}]$ et celle de l'un des deux autres côtés $[\text{AB}]$ ou $[\text{OA}]$.

1ère méthode :

• On cherche une équation de la médiatrice L de $[\text{OB}]$.

L a pour équation $x=-\frac{a}{2}$ (car le milieu de $[\text{OB}]$ a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{2}\,;0\right)$.

• On cherche une équation de la médiatrice L' de $[\text{OA}]$.

La droite L' passe par le milieu K de $[\text{OA}]$ et est perpendiculaire à (OA).

K a pour coordonnées $\left(\frac{a}{2}\,;\frac{a}{2}\right)$ (par la formule des coordonnées d'un milieu).

L' a pour coefficient directeur – 1 (car le produit du coefficient directeur de D par celui de L' est égal à – 1) ;

L' a pour équation $y=a-x$.

$\Omega\in L$ donc $x_\Omega=-\frac{a}{2}$.

Comme $\Omega\in L'$, on a $y_\Omega=a-x_\Omega=a-\left(-\frac{a}{2}\right)=a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$.

Ainsi Ω a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{2}\,;\frac{3a}{2}\right)$.

Pour déterminer le rayon du cercle circonscrit à AOB, on calcule OΩ.
$\text{O}\Omega^2=\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2=\frac{10a^2}{4}$ donc $\text{O}\Omega=\frac{|\,a\,|\sqrt{10}}{2}$. On peut aussi écrire $\text{O}\Omega=|\,a\,|\sqrt{\frac{5}{2}}$.

2e méthode :

• On cherche une équation de la médiatrice L de $[\text{OB}]$.

L a pour équation $x=-\frac{a}{2}$ (car le milieu de $[\text{OB}]$ a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{2}\,;0\right)$.

• On cherche une équation de la médiatrice L'' de $[\text{AB}]$.
La droite L'' passe par le milieu E de $[\text{AB}]$ et est perpendiculaire à (AB).

E a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{a}{2}\right)$ (par la formule des coordonnées d'un milieu).
D'après le résultat du 4°), L'' a pour coefficient directeur – 2.

L'' a donc pour équation $y=-2x+\frac{a}{2}$.

$\Omega\in L$ donc $x_\Omega=-\frac{a}{2}$.

Comme $\Omega \in L''$, on a $y_\Omega = -2x_\Omega + \frac{a}{2} = -2 \times \left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Ainsi Ω a pour coordonnées $\left(-\frac{a}{2}\,;\frac{3a}{2}\right)$.

Le rayon du cercle circonscrit à AOB est égal à $\mathrm{O}\Omega = |\,a\,|\sqrt{\frac{5}{2}}$.

On vérifie les coordonnées de B sur le graphique.

Quelle est la nature du triangle ΩAB ? On répondra de manière précise.

$$\Omega \left| \begin{array}{l} -\frac{a}{2} \\ \frac{3a}{2} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{\Omega \mathrm{A}} \left| \begin{array}{l} -\frac{a}{2} \\ -\frac{3a}{2} \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{\Omega \mathrm{B}} \left| \begin{array}{l} \frac{3a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{array} \right.$$

On vérifie que $\overrightarrow{\Omega \mathrm{A}} \bullet \overrightarrow{\Omega \mathrm{B}} = 0$ et de manière quasiment évidente que $\Omega\mathrm{A} = \Omega\mathrm{B}$.

On en déduit que le triangle ΩAB est isocèle rectangle en Ω.