TS1

Contrôle du mardi 16 avril 2019 (4 heures)

Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.

Partie commune (3 heures)

Le barème est donné sur 20.

I. (9 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) a) 1 point ; b) 2 points ; 4°) 2 points)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto mx + 2\ln(1-x)$ définie sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un point fixe que l'on précisera.
Déterminer le coefficient directeur de la tangente en ce point.

2°) Déterminer la limite de f_m en 1^-. En déduire que pour tout réel m, la courbe $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote verticale que l'on précisera.

Dans toute la suite, on suppose que m est un réel strictement positif.

3°) a) Rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$; en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x}$.

b) Démontrer que $f_m(x) = mx + 2\ln(-x) + 2\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ puis que $f_m(x) = x\left(m + 2\dfrac{\ln(-x)}{x}\right) + 2\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ pour tout réel x strictement négatif.
En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ (on rappelle que $m > 0$).

4°) Dans un même tableau, étudier le signe de $f_m'(x)$ et les variations de f_m en complétant avec les limites calculées précédemment.
En déduire que f_m admet un maximum global sur $]-\infty ; 1[$.

II. (2 points)

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et Γ d'équations respectives $y = -x^2 + 2x + 1$ et $y = x^2$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ puis calculer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre les deux courbes.

III. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$ définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1°) Démontrer que la fonction $\text{F} : t \mapsto \dfrac{t \ln t}{1+t} - \ln(1+t)$ est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2°) On pose $I(a) = \displaystyle\int_a^1 f(t)\,\text{d}t$ où a est un réel strictement positif.

Calculer $I(a)$; déterminer $\lim\limits_{a \to 0^+} I(a)$.

IV. (2 points)

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $(n+1)! - n! \geqslant 10^{2019}$.

Indication : Utiliser le logarithme népérien.

V. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Dans l'espace muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $\text{A}(-1 ; 2 ; 0)$, $\text{B}(1 ; 2 ; 4)$, $\text{C}(-1 ; 1 ; 1)$ ainsi que la droite D dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1°) Démontrer que A, B, C ne sont pas alignés puis déterminer un système d'équations paramétriques du plan (ABC).

2°) Démontrer que D et (ABC) sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

VI. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Soit U un point quelconque de la droite (AC) et V un point quelconque de la droite (DE).
On pose $\overrightarrow{\text{AU}} = t\overrightarrow{\text{AC}}$ et $\overrightarrow{\text{DV}} = t'\overrightarrow{\text{DE}}$ où t et t' sont deux réels.

1°) Calculer en fonction de t et t' les produits scalaires $p = \overrightarrow{\text{UV}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}$ et $p' = \overrightarrow{\text{UV}} \cdot \overrightarrow{\text{DE}}$.

2°) Déterminer les valeurs de t et t' pour lesquelles la droite (UV) est perpendiculaire aux droites (AC) et (DE).

Corrigé du contrôle du 16-4-2019

I.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto mx + 2\ln(1-x)$ définie sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un point fixe que l'on précisera.
Déterminer le coefficient directeur de la tangente en ce point.

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad f_m(0) = m \times 0 + 2\ln(1-0)$$
$$= 2\ln 1$$
$$= 0$$

On en déduit que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par le point O.

> Pour trouver, on peut tracer des courbes $\mathcal{C}_m$ pour différentes valeurs de m sur l'écran de la calculatrice.

$$\forall x \in]-\infty\,;1[\quad f_m'(x) = m - \frac{2}{1-x}$$

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad f_m'(0) = m - 2$$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_m$ en O est égal à $m-2$.

> Il n'y a pas besoin de déterminer une équation de la tangente.

2°) Déterminer la limite de f_m en 1^-. En déduire que pour tout réel m, la courbe $\mathcal{C}_m$ admet une asymptote verticale que l'on précisera.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \underbrace{(1-x)}_{X} = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{x \to 1^-} (mx) = m$.

Donc, comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$, par limite d'une somme, $\lim\limits_{x \to 1^-} f_m(x) = -\infty$.

Ainsi, pour tout réel m, la courbe $\mathcal{C}_m$ admet la droite Δ d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.

Dans toute la suite, on suppose que m est un réel strictement positif.

3°) a) Rappeler $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$; en déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ d'après le cours (limite de référence) donc par changement de variable $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{-x} = 0$ ce qui donne immédiatement $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x} = 0$.

b) Démontrer que $f_m(x) = mx + 2\ln(-x) + 2\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ puis que $f_m(x) = x\left(m + 2\dfrac{\ln(-x)}{x}\right) + 2\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$ pour tout réel x strictement négatif.

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad f_m(x) = mx + 2\ln\left[-x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right]$$
$$= mx + 2\left[\ln(-x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] \quad \text{(possible car } -x \text{ et } 1 - \tfrac{1}{x} \text{ sont tous deux strictement positifs)}$$
$$= mx + 2\ln(-x) + 2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$
$$= x\left(m + 2\frac{\ln(-x)}{x}\right) + 2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \quad \text{(factorisation par } x \text{ des deux premiers termes de la somme)}$$

En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x)$ (on rappelle que $m > 0$).

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}_{X} = 1 \\ \lim\limits_{X \to +\infty} 2\ln X = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

En utilisant $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(-x)}{x} = 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(m + 2\dfrac{\ln(-x)}{x}\right) = m$.

Comme $m > 0$, on en déduit par propriété de limite d'un produit que $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x\left(m + 2\dfrac{\ln(-x)}{x}\right)\right] = -\infty$.

> Il est important de mentionner que $m > 0$ pour la limite du produit.

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to -\infty} f_m(x) = -\infty$.

4°) Dans un même tableau, étudier le signe de $f_m'(x)$ et les variations de f_m en complétant avec les limites calculées précédemment.
En déduire que f_m admet un maximum global sur $]-\infty\,;1[$.

Dans la question 1°) nous avons vu que $\forall x \in]-\infty\,;1[\quad f_m'(x)=m-\dfrac{2}{1-x}$.

Pour étudier facilement le signe de $f_m'(x)$, on écrit $f_m'(x)$ sous la forme d'un seul quotient.

On peut aussi écrire que $\forall x \in]-\infty\,;1[\quad f_m'(x)=m+\dfrac{2}{x-1}$ soit $f_m'(x)=\dfrac{mx-m+2}{x-1}$.

$mx-m+2$ est une expression du premier degré en x (de la forme $ax+b$) qui s'annule en $\dfrac{m-2}{m}=1-\dfrac{2}{m}$.

On notera que pour $m>0$, cette valeur d'annulation est strictement inférieure à 1.

Sous la valeur 1, on doit mettre une double barre sur les deux dernières lignes.

x	$-\infty$		$\dfrac{m-2}{m}$		1
Signe de $mx-m+2$		$-$	0	$+$	
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0
Signe de $f_m'(x)$		$+$	0	$-$	‖
Variations de f_m	$-\infty$	↗	$f_m\left(\dfrac{m-2}{m}\right)$	↘	$-\infty$ ‖

D'après le tableau de variations, f_m admet un maximum global sur $]-\infty\,;1[$ obtenu pour $x=\dfrac{m-2}{m}$.

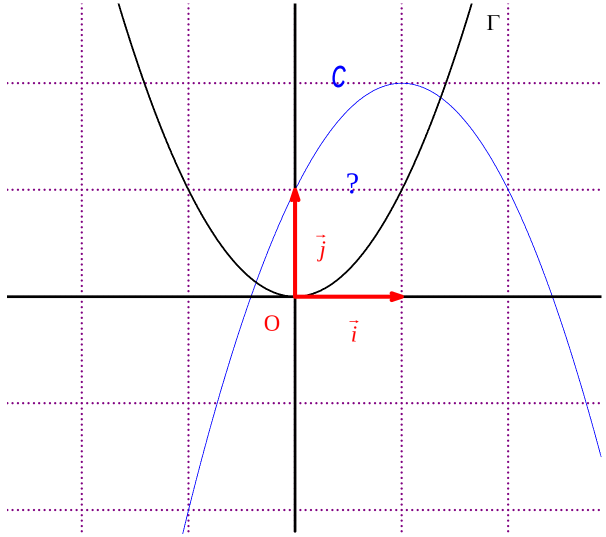
Le calcul de $f_m\left(\dfrac{m-2}{m}\right)$ ne présente pas d'intérêt pour l'exercice.

II.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et Γ d'équations respectives $y=-x^2+2x+1$ et $y=x^2$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ puis calculer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre les deux courbes.

On commence par tracer $\mathcal{C}$ et Γ sur l'écran de la calculatrice.



Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ sont les solutions de l'équation $-x^2+2x+1=x^2\quad(1)$.

$(1)\Leftrightarrow -2x^2+2x+1=0\quad(1')$

$(1')$ est une équation du second degré dont le discriminant réduit est égal à 3.

$(1')$ admet donc deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Γ sont x_1 et x_2.

La position relative de $\mathcal{C}$ et Γ est donnée par le signe du polynôme $h(x)=\left(-x^2+2x+1\right)-x^2=-2x^2+2x+1$ (on calcule la différence).

La règle du signe d'un polynôme du second degré nous dit que le polynôme $h(x)$ est positif ou nul sur l'intervalle $[x_1\,;x_2]$. Par conséquent, $\mathcal{C}$ est au-dessus de Γ sur l'intervalle $[x_1\,;x_2]$.

L'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}$ et Γ est donc donnée par $\mathcal{A}=\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} h(x)\ \mathrm{d}x$.

$$\mathcal{A}=\int_{x_1}^{x_2} h(x)\ \mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(-2x^2+2x+1\right)\ \mathrm{d}x$$

$$=\left[-\frac{2x^3}{3}+x^2+x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$=\sqrt{3}\ \text{u. a.}$$

L'aire cherchée est donc égale à $\sqrt{3}$ unités d'aire.

• Pour le calcul, on peut utiliser la calculatrice en commençant par rentrer la primitive dans la calculatrice :

$\text{Y1}=-\dfrac{2\text{X}^3}{3}+\text{X}^2+\text{X}$.

On tape ensuite $\text{Y1}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)-\text{Y1}\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

• On peut évidemment vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice. On aura uniquement une valeur approchée.

III.

On considère la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{(1+t)^2}$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1°) Démontrer que la fonction $\text{F} : t \mapsto \dfrac{t\ln t}{1+t}-\ln(1+t)$ est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

On calcule la dérivée de F. Pour cela, on applique les différentes formules de dérivation.
Avant de dériver le quotient, on doit commencer par calculer la dérivée de la fonction $u : t \mapsto t\ln t$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit. On obtient $u'(t)=1\times\ln t+t\times\dfrac{1}{t}=\ln t+1$.

$\forall t\in\,]0\,;+\infty[\quad \text{F}'(t)=\dfrac{(\ln t+1)(1+t)-t\ln t}{(1+t)^2}-\dfrac{1}{1+t}$

$$=\frac{\ln t+\cancel{t\ln t}+\cancel{1+t}-\cancel{t\ln t}-\cancel{(1+t)}}{(1+t)^2}$$

$$=\frac{\ln t}{(1+t)^2}$$

$$=f(t)$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$.

2°) On pose $I(a)=\displaystyle\int_a^1 f(t)\,\text{d}t$ où a est un réel strictement positif.

Calculer $I(a)$; déterminer $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} I(a)$.

$I(a)=\displaystyle\int_a^1 f(t)\,\text{d}t$

$=\left[\text{F}(t)\right]_a^1$ (on utilise le résultat de la question précédente)

$=\text{F}(1)-\text{F}(a)$

$\text{F}(1)=0-\ln 2=-\ln 2$

$\text{F}(a)=\dfrac{a\ln a}{1+a}-\ln(1+a)$

On en déduit que $\forall a\in\mathbb{R}_+^*\quad I(a)=\ln(1+a)-\dfrac{a\ln a}{1+a}-\ln 2$.

On peut aussi écrire $I(a)=\ln\dfrac{1+a}{2}-\dfrac{a\ln a}{1+a}$.

On a $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}\ln(1+a)=0$ de manière évidente.

$\displaystyle\lim_{a\to 0^+}(a\ln a)=0$ (limite de référence) donc $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}\frac{a\ln a}{1+a}=0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} I(a)=-\ln 2$.

On peut vérifier le résultat en calculant $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\text{d}t$ avec la calculatrice (il faut oser écrire $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\text{d}t$).
On constate que les premières décimales coïncident avec celles de $-\ln 2$.

IV.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $(n+1)!-n!\geqslant 10^{2019}$.

Indication : Utiliser le logarithme népérien.

Une recherche directe n'est pas possible car 10^{2019} dépasse les capacités de la calculatrice.

D'abord 0 n'est pas solution de manière évidente. On cherche donc n dans $\mathbb{N}^*$.

On va d'abord factoriser le membre de gauche de l'inégalité puis passer au logarithme népérien (ou décimal si l'on préfère).

$(1) \Leftrightarrow n! \times (n+1) - n! \geqslant 10^{2019}$

$\Leftrightarrow n!(n+1-1) \geqslant 10^{2019}$ (on peut factoriser une expression avec des factorielles)

$\Leftrightarrow n! \times n \geqslant 10^{2019}$

$\Leftrightarrow \ln(n! \times n) \geqslant \ln\left(10^{2019}\right)$

$\Leftrightarrow \ln n! + \ln n \geqslant 2019 \ln 10$

$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{k=n} \ln k\right) + \ln n \geqslant 2019 \ln 10 \quad (1')$

On a $2019 \ln 10 = 4648{,}91930...$.

On cherche par tâtonnements ou en réalisant un programme sur calculatrice.

On trouve que le plus petit entier naturel n pour lequel $(1')$ (et par conséquent (1)) est vérifiée est 814.

V.

Dans l'espace muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points $\mathrm{A}(-1\,;2\,;0)$, $\mathrm{B}(1\,;2\,;4)$, $\mathrm{C}(-1\,;1\,;1)$ ainsi que la droite D dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

1°) Démontrer que A, B, C ne sont pas alignés puis déterminer un système d'équations paramétriques du plan (ABC).

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}} \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel α tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \alpha \overrightarrow{\mathrm{AB}}$.
Donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

Comme $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ne sont pas colinéaires, un repère du plan (ABC) est $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$.

Un système d'équations paramétriques de (ABC) est $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - \mu \\ z = 4\lambda + \mu \end{cases} \quad \left((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right)$.

2°) Démontrer que D et (ABC) sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

On résout le système $\begin{cases} -1 + 2\lambda = 2t & (1) \\ 2 - \mu = -4t - 3 & (2) \\ 4\lambda + \mu = t & (3) \end{cases}$.

(1) donne $\lambda = t + \dfrac{1}{2} \quad (1')$.

(2) donne $\mu = 5 + 4t \quad (2')$.

En remplaçant alors dans (3), on obtient $4t + 2 + 5 + 4t = t$ ce qui donne $t = -1$.

Les égalités $(1')$ et $(2')$ donnent alors $\lambda = -\dfrac{1}{2}$ et $\mu = 1$.

On peut évidemment vérifier la résolution du système à l'aide de la calculatrice.

Ainsi le système $\begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases}$ admet un unique triplet solution et par conséquent, D et (ABC) sont sécants en un point I.

La valeur de t obtenue dans la résolution permet d'obtenir immédiatement les coordonnées de I.

$\mathrm{I} \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$

VI.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Soit U un point quelconque de la droite (AC) et V un point quelconque de la droite (DE).

On pose $\overrightarrow{\mathrm{AU}} = t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DV}} = t'\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ où t et t' sont deux réels.

1°) Calculer en fonction de t et t' les produits scalaires $p = \overrightarrow{\mathrm{UV}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ et $p' = \overrightarrow{\mathrm{UV}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DE}}$.

On commence évidemment par faire une figure soignée.

$$
\begin{aligned}
p &= \overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \left(\overrightarrow{UA} + \overrightarrow{AV}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \overrightarrow{UA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AV} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= \left(-\overrightarrow{AU}\right) \cdot \overrightarrow{AC} + \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DV}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -\left(\overrightarrow{AU} \cdot \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DV} \cdot \overrightarrow{AC} \\
&= -\left(\left(t\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \left(t'\overrightarrow{DE}\right) \cdot \overrightarrow{AC} \quad \text{(car D est le projeté orthogonal de C sur } (\mathrm{AD})\text{)} \\
&= -t\left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AD}^2 + t'\left(\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AC}\right) \\
&= -t\overrightarrow{AC}^2 + 1 + t'\left[\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \overrightarrow{AC}\right] \\
&= -t\mathrm{AC}^2 + 1 + t'\left(\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC}\right) \\
&= -t \times 2 + 1 + t'\left(-1^2 + 0\right) \qquad \text{(}\mathrm{AC}^2 = 2 \text{ par simple application du théorème de Pythagore)} \\
&= 1 - 2t - t'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p' &= \overrightarrow{UV} \cdot \overrightarrow{DE} \\
&= \left(\overrightarrow{UA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DV}\right) \cdot \overrightarrow{DE} \\
&= \overrightarrow{UA} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DV} \cdot \overrightarrow{DE} \\
&= \left(-t\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} + \left(t'\overrightarrow{DE}\right) \cdot \overrightarrow{DE} \\
&= -t\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) \cdot \overrightarrow{DE} - \mathrm{AD}^2 + t'\mathrm{DE}^2 \\
&= -t\left(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE}\right) - 1 + 2t' \\
&= -t\left(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DA} + 0\right) - 1 + 2t' \\
&= -t \times (-1) - 1 + 2t' \\
&= t + 2t' - 1
\end{aligned}
$$

2°) Déterminer les valeurs de t et t' pour lesquelles la droite (UV) est perpendiculaire aux droites (AC) et (DE).

On vérifie la résolution à l'aide de la calculatrice.

$(\mathrm{UV}) \perp (\mathrm{AC}) \Leftrightarrow p = 0$

$(\mathrm{UV}) \perp (\mathrm{DE}) \Leftrightarrow p' = 0$

On résout donc le système $\begin{cases} 1 - 2t - t' = 0 \\ t + 2t' - 1 = 0 \end{cases}$.

On obtient immédiatement que l'unique solution du système est le couple $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

Ainsi, (UV) est perpendiculaire à (AC) et (DE) pour $t = t' = \frac{1}{3}$.