



Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.

Partie commune (3 heures)

Le barème est donné sur 20.

I. (9 points : 1° 2 points ; 2° 2 points ; 3° a) 1 point ; b) 2 points ; 4° 2 points)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto mx + 2\ln(1-x)$ définie sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$ et on note \mathcal{C}_m sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Démontrer que toutes les courbes \mathcal{C}_m passent par un point fixe que l'on précisera. Déterminer le coefficient directeur de la tangente en ce point.

2°) Déterminer la limite de f_m en 1^- . En déduire que pour tout réel m , la courbe \mathcal{C}_m admet une asymptote verticale que l'on précisera.

Dans toute la suite, on suppose que m est un réel strictement positif.

3°) a) Rappeler $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$; en déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x}$.

b) Démontrer que $f_m(x) = mx + 2\ln(-x) + 2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ puis que $f_m(x) = x\left(m + 2\frac{\ln(-x)}{x}\right) + 2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ pour tout réel x strictement négatif.

En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ (on rappelle que $m > 0$).

4°) Dans un même tableau, étudier le signe de $f_m'(x)$ et les variations de f_m en complétant avec les limites calculées précédemment.

En déduire que f_m admet un maximum global sur $] -\infty ; 1[$.

II. (2 points)

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre les courbes \mathcal{C} et Γ d'équations respectives $y = -x^2 + 2x + 1$ et $y = x^2$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Déterminer les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C} et Γ puis calculer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre les deux courbes.

III. (2 points : 1° 1 point ; 2° 1 point)

On considère la fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$ définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1°) Démontrer que la fonction $F : t \mapsto \frac{t \ln t}{1+t} - \ln(1+t)$ est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2°) On pose $I(a) = \int_a^1 f(t) dt$ où a est un réel strictement positif.

Calculer $I(a)$; déterminer $\lim_{a \rightarrow 0^+} I(a)$.

IV. (2 points)

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $(n+1)! - n! \geq 10^{2019}$.

Indication : Utiliser le logarithme népérien.

V. (2 points : 1° 1 point ; 2° 1 point)

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$, $C(-1; 1; 1)$ ainsi

que la droite D dont un système d'équations paramétriques est
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

1°) Démontrer que A, B, C ne sont pas alignés puis déterminer un système d'équations paramétriques du plan (ABC).

2°) Démontrer que D et (ABC) sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

VI. (3 points : 1° 2 points ; 2° 1 point)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Soit U un point quelconque de la droite (AC) et V un point quelconque de la droite (DE).

On pose $\overline{AU} = t\overline{AC}$ et $\overline{DV} = t'\overline{DE}$ où t et t' sont deux réels.

1°) Calculer en fonction de t et t' les produits scalaires $p = \overline{UV} \cdot \overline{AC}$ et $p' = \overline{UV} \cdot \overline{DE}$.

2°) Déterminer les valeurs de t et t' pour lesquelles la droite (UV) est perpendiculaire aux droites (AC) et (DE).

Corrigé du contrôle du 16-4-2019

I.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto mx + 2\ln(1-x)$ définie sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$ et on note \mathcal{E}_m sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1°) Démontrer que toutes les courbes \mathcal{E}_m passent par un point fixe que l'on précisera. Déterminer le coefficient directeur de la tangente en ce point.

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{R} \quad f_m(0) &= 2\ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que toutes les courbes \mathcal{E}_m passent par le point O.

Pour trouver, on peut tracer des courbes \mathcal{E}_m pour différentes valeurs de m sur l'écran de la calculatrice.

$$\forall x \in] -\infty ; 1[\quad f_m'(x) = m - \frac{2}{1-x}$$

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad f_m'(0) = m - 2$$

Le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{E}_m en O est égal à $m - 2$.

Il n'y a pas besoin de déterminer une équation de la tangente.

2°) Déterminer la limite de f_m en 1^- . En déduire que pour tout réel m , la courbe \mathcal{E}_m admet une asymptote verticale que l'on précisera.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \underbrace{(1-x)}_x &= 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln X &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty.$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 1^-} (mx) = m.$$

$$\text{Donc, comme } \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty, \text{ par limite d'une somme, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f_m(x) = -\infty.$$

Ainsi, pour tout réel m , la courbe \mathcal{E}_m admet la droite Δ d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.

Dans toute la suite, on suppose que m est un réel strictement positif.

$$3^\circ) \text{ a) Rappeler } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}; \text{ en déduire } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ d'après le cours (limite de référence) donc par changement de variable } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0 \text{ ce qui donne}$$

$$\text{immédiatement } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = 0.$$

b) Démontrer que $f_m(x) = mx + 2\ln(-x) + 2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ puis que $f_m(x) = x\left(m + 2\frac{\ln(-x)}{x}\right) + 2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ pour tout réel x strictement négatif.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad f_m(x) &= mx + 2\ln\left[-x\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] \\ &= mx + 2\left[\ln(-x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right] \text{ (possible car } -x \text{ et } 1 - \frac{1}{x} \text{ sont tous deux strictement positifs)} \\ &= mx + 2\ln(-x) + 2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= x\left(m + 2\frac{\ln(-x)}{x}\right) + 2\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \text{ (factorisation par } x \text{ des deux premiers termes de la somme)} \end{aligned}$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x)$ (on rappelle que $m > 0$).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}_x &= 1 \\ \lim_{X \rightarrow +\infty} 2\ln X &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ donc par limite d'une composée } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

$$\text{En utilisant } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = 0, \text{ on obtient } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(m + 2\frac{\ln(-x)}{x}\right) = m.$$

$$\text{Comme } m > 0, \text{ on en déduit par propriété de limite d'un produit que } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x\left(m + 2\frac{\ln(-x)}{x}\right)\right] = -\infty.$$

Il est important de mentionner que $m > 0$ pour la limite du produit.

$$\text{Par conséquent, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = -\infty.$$

4°) Dans un même tableau, étudier le signe de $f_m'(x)$ et les variations de f_m en complétant avec les limites calculées précédemment.

En déduire que f_m admet un maximum global sur $] -\infty ; 1[$.

$$\text{Dans la question 1°) nous avons vu que } \forall x \in] -\infty ; 1[\quad f_m'(x) = m - \frac{2}{1-x}.$$

Pour étudier facilement le signe de $f_m'(x)$, on écrit $f_m'(x)$ sous la forme d'un seul quotient.

On peut aussi écrire que $\forall x \in]-\infty; 1[$ $f_m'(x) = m + \frac{2}{x-1}$ soit $f_m'(x) = \frac{mx-m+2}{x-1}$.

$mx-m+2$ est une expression du premier degré en x (de la forme $ax+b$) qui s'annule en $\frac{m-2}{m} = 1 - \frac{2}{m}$.

On notera que pour $m > 0$, cette valeur d'annulation est strictement inférieure à 1.

Sous la valeur 1, on doit mettre une double barre sur les deux dernières lignes.

x	$-\infty$	$\frac{m-2}{m}$	1
Signe de $mx-m+2$	-	0	+
Signe de $x-1$	-		-
Signe de $f_m'(x)$	+	0	-
Variations de f_m	$-\infty$	$f_m\left(\frac{m-2}{m}\right)$	$-\infty$

D'après le tableau de variations, f_m admet un maximum global sur $]-\infty; 1[$ obtenu pour $x = \frac{m-2}{m}$.

Le calcul de $f_m\left(\frac{m-2}{m}\right)$ ne présente pas d'intérêt pour l'exercice.

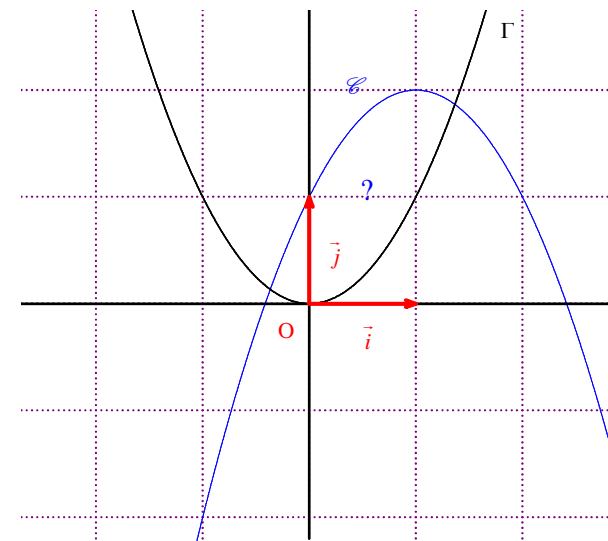
II.

Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre les courbes \mathcal{C} et Γ d'équations respectives

$y = -x^2 + 2x + 1$ et $y = x^2$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Déterminer les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C} et Γ puis calculer la valeur exacte de l'aire du domaine compris entre les deux courbes.

On commence par tracer \mathcal{C} et Γ sur l'écran de la calculatrice.



Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C} et Γ sont les solutions de l'équation $-x^2 + 2x + 1 = x^2$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow -2x^2 + 2x + 1 = 0 \quad (1')$$

(1') est une équation du second degré dont le discriminant réduit est égal à 3.

(1') admet donc deux solutions réelles distinctes $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Les abscisses des points d'intersection de \mathcal{C} et Γ sont x_1 et x_2 .

La position relative de \mathcal{C} et Γ est donnée par le signe du polynôme $h(x) = (-x^2 + 2x + 1) - x^2 = -2x^2 + 2x + 1$ (on calcule la différence).

La règle du signe d'un polynôme du second degré nous dit que le polynôme $h(x)$ est positif ou nul sur l'intervalle $[x_1; x_2]$. Par conséquent, \mathcal{C} est au-dessus de Γ sur l'intervalle $[x_1; x_2]$.

L'aire du domaine compris entre les courbes \mathcal{C} et Γ est donc donnée par $\mathcal{A} = \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{x_1}^{x_2} h(x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (-2x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + x \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= \sqrt{3} \text{ u. a.} \end{aligned}$$

L'aire cherchée est donc égale à $\sqrt{3}$ unités d'aire.

• Pour le calcul, on peut utiliser la calculatrice en commençant par rentrer la primitive dans la calculatrice :

$$Y1 = -\frac{2X^3}{3} + X^2 + X.$$

On tape ensuite $Y1\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) - Y1\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

• On peut évidemment vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice. On aura uniquement une valeur approchée.

III.

On considère la fonction $f: t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}$ définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

1°) Démontrer que la fonction $F: t \mapsto \frac{t \ln t}{1+t} - \ln(1+t)$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

On calcule la dérivée de F . Pour cela, on applique les différentes formules de dérivation. Avant de dériver le quotient, on doit commencer par calculer la dérivée de la fonction $u: t \mapsto t \ln t$ en utilisant la

formule de dérivation d'un produit. On obtient $u'(t) = 1 \times \ln t + t \times \frac{1}{t} = \ln t + 1$.

$$\begin{aligned} \forall t \in]0; +\infty[\quad F'(t) &= \frac{(\ln t + 1)(1+t) - t \ln t}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} \\ &= \frac{\ln t + \cancel{t \ln t} + \cancel{1+t} - \cancel{t \ln t} - (1+t)}{(1+t)^2} \\ &= \frac{\ln t}{(1+t)^2} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

On en déduit que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

2°) On pose $I(a) = \int_a^1 f(t) dt$ où a est un réel strictement positif.

Calculer $I(a)$; déterminer $\lim_{a \rightarrow 0^+} I(a)$.

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^1 f(t) dt \\ &= [F(t)]_a^1 \quad (\text{on utilise le résultat de la question précédente}) \\ &= F(1) - F(a) \end{aligned}$$

$$F(1) = 0 - \ln 2 = -\ln 2$$

$$F(a) = \frac{a \ln a}{1+a} - \ln(1+a)$$

On en déduit que $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad I(a) = \ln(1+a) - \frac{a \ln a}{1+a} - \ln 2$.

On peut aussi écrire $I(a) = \ln \frac{1+a}{2} - \frac{a \ln a}{1+a}$.

On a $\lim_{a \rightarrow 0^+} \ln(1+a) = 0$ de manière évidente.

$\lim_{a \rightarrow 0^+} (a \ln a) = 0$ (limite de référence) donc $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a \ln a}{1+a} = 0$.

On en déduit que $\lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = -\ln 2$.

On peut vérifier le résultat en calculant $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ avec la calculatrice. On constate que les premières décimales coïncident avec celles de $-\ln 2$.

IV.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $(n+1)! - n! \geq 10^{2019}$.

Indication : Utiliser le logarithme népérien.

Une recherche directe n'est pas possible car 10^{2019} dépasse les capacités de la calculatrice.

D'abord 0 n'est pas solution de manière évidente. On cherche donc n dans \mathbb{N}^* .

On va d'abord factoriser le membre de gauche de l'inégalité puis passer au logarithme népérien (ou décimal si l'on préfère).

$$(1) \Leftrightarrow n!(n+1) - n! \geq 10^{2019}$$

$$\Leftrightarrow n!(n+1) \geq 10^{2019} \quad (\text{on peut factoriser une expression avec des factorielles})$$

$$\Leftrightarrow n! \times n \geq 10^{2019}$$

$$\Leftrightarrow \ln(n! \times n) \geq \ln(10^{2019})$$

$$\Leftrightarrow \ln n! + \ln n \geq 2019 \ln 10$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{k=n} \ln k \right) + \ln n \geq 2019 \ln 10 \quad (1')$$

On a $2019 \ln 10 = 4648,91930\dots$

On cherche par tâtonnements ou en réalisant un programme sur calculatrice.

On trouve que le plus petit entier naturel n pour lequel (1') (et par conséquent (1)) est vérifiée est 814.

V.

Dans l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 2; 4)$, $C(-1; 1; 1)$ ainsi

$$\text{que la droite } D \text{ dont un système d'équations paramétriques est } \begin{cases} x = 2t \\ y = -4t - 3 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

1°) Démontrer que A, B, C ne sont pas alignés puis déterminer un système d'équations paramétriques du plan (ABC).

$$\overline{AB} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{vmatrix} \quad \overline{AC} \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Les vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires car il n'existe pas de réel α tel que $\overline{AC} = \alpha \overline{AB}$.
Donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

Comme \overline{AB} et \overline{AC} ne sont pas colinéaires, une base du plan (ABC) est $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$.

$$\text{Un système d'équations paramétriques de (ABC) est } \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - \mu \\ z = 4\lambda + \mu \end{cases} \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2).$$

2°) Démontrer que D et (ABC) sont sécants en un point I dont on déterminera les coordonnées.

$$\text{On résout le système } \begin{cases} -1 + 2\lambda = 2t & (1) \\ 2 - \mu = -4t - 3 & (2) \\ 4\lambda + \mu = t & (3) \end{cases}$$

$$(1) \text{ donne } \lambda = t + \frac{1}{2} \quad (1')$$

$$(2) \text{ donne } \mu = 5 + 4t \quad (2')$$

En remplaçant alors dans (3), on obtient $4t + 2 + 5 + 4t = t$ ce qui donne $t = -1$.

Les égalités (1') et (2') donnent alors $\lambda = -\frac{1}{2}$ et $\mu = 1$.

On peut évidemment vérifier la résolution du système à l'aide de la calculatrice.

$$\text{Ainsi le système } \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases} \text{ admet un unique triplet solution et par conséquent, } D \text{ et (ABC) sont sécants en un point I.}$$

La valeur de t obtenue dans la résolution permet d'obtenir immédiatement les coordonnées de I.

$$I \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

VI.

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Soit U un point quelconque de la droite (AC) et V un point quelconque de la droite (DE).

On pose $\overline{AU} = t \overline{AC}$ et $\overline{DV} = t' \overline{DE}$ où t et t' sont deux réels.

1°) Calculer en fonction de t et t' les produits scalaires $p = \overline{UV} \cdot \overline{AC}$ et $p' = \overline{UV} \cdot \overline{DE}$.

On commence évidemment par faire une figure soignée.

$$\begin{aligned}
p &= \overline{UV} \cdot \overline{AC} \\
&= (\overline{UA} + \overline{AV}) \cdot \overline{AC} \\
&= \overline{UA} \cdot \overline{AC} + \overline{AV} \cdot \overline{AC} \\
&= (-\overline{AU}) \cdot \overline{AC} + (\overline{AD} + \overline{DV}) \cdot \overline{AC} \\
&= -(\overline{AU} \cdot \overline{AC}) + \overline{AD} \cdot \overline{AC} + \overline{DV} \cdot \overline{AC} \\
&= -\left((t\overline{AC}) \cdot \overline{AC}\right) + \overline{AD} \cdot \overline{AD} + (t'\overline{DE}) \cdot \overline{AC} \quad (\text{car D est le projeté orthogonal de C sur (AD)}) \\
&= -t(\overline{AC} \cdot \overline{AC}) + \overline{AD}^2 + t'(\overline{DE} \cdot \overline{AC}) \\
&= -t\overline{AC}^2 + 1 + t'[(\overline{DA} + \overline{AH}) \cdot \overline{AC}] \\
&= -t\overline{AC}^2 + 1 + t'(\overline{DA} \cdot \overline{AC} + \overline{DA} \cdot \overline{AC}) \\
&= -t \times 2 + 1 + t'(-1^2 + 0) \quad (\overline{AC}^2 = 2 \text{ par simple application du théorème de Pythagore}) \\
&= 1 - 2t - t'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p' &= \overline{UV} \cdot \overline{DE} \\
&= (\overline{UA} + \overline{AD} + \overline{DV}) \cdot \overline{DE} \\
&= \overline{UA} \cdot \overline{DE} + \overline{AD} \cdot \overline{DE} + \overline{DV} \cdot \overline{DE} \\
&= (-t\overline{AC}) \cdot \overline{DE} + \overline{AD} \cdot \overline{DA} + (t'\overline{DE}) \cdot \overline{DE} \\
&= -t(\overline{AD} + \overline{DC}) \cdot \overline{DE} - \overline{AD}^2 + t'\overline{DE}^2 \\
&= -t(\overline{AD} \cdot \overline{DE} + \overline{DC} \cdot \overline{DE}) - 1 + 2t' \\
&= -t(\overline{AD} \cdot \overline{DA} + 0) - 1 + 2t' \\
&= -t \times (-1) - 1 + 2t' \\
&= t + 2t' - 1
\end{aligned}$$

2°) Déterminer les valeurs de t et t' pour lesquelles la droite (UV) est perpendiculaire aux droites (AC) et (DE).

On vérifie la résolution à l'aide de la calculatrice.

$$(UV) \perp (AC) \Leftrightarrow p = 0$$

$$(UV) \perp (DE) \Leftrightarrow p' = 0$$

$$\text{On résout donc le système } \begin{cases} 1 - 2t - t' = 0 \\ t + 2t' - 1 = 0 \end{cases}.$$

On obtient immédiatement que l'unique solution du système est le couple $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Ainsi, (UV) est perpendiculaire à (AC) et (DE) pour $t = t' = \frac{1}{3}$.