1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 10 mai 2019 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

Dans les exercices **I** à **IV**, le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Soit M un point quelconque de *P* de coordonnées $(x\,;y)$. Exprimer OM^2 en fonction de *x* et *y*.
2°) Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon *R* (*R* est un réel strictement positif fixé).

…………………………………… (une seule égalité)	…………………………………… (une seule égalité)

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère le point A de cordonnées $(a\,;0)$ où *a* est un réel donné.

1°) Calculer OA en fonction de *a*. Répondre sous la forme d'une égalité sans faire de phrase en présentant le calcul.

………

2°) On suppose que $a \neq 0$. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[\text{OA}]$ (voir modèle de rédaction donné au verso, à la fin du sujet).

………

………

………

………

………

………

III. (6 points : 1°) 4 points ; 2°) 2 points)

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 4 et *D* la droite d'équation $y = 3x$.

1°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D*.
Indications : On commencera par déterminer une équation de $\mathcal{C}$ puis on cherchera les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D* en rédigeant ainsi : « Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et *D* sont les solutions de l'équation … (1) ».

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) Soit D' une droite perpendiculaire à *D*. Quel est son coefficient directeur ? Expliquer brièvement.

………

………

IV. (5 points : 1°) 1 point + 3 points ; 2°) 1 point)

À tout réel *m* on associe la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x = m$.

1°) Discuter suivant les valeurs de *m* la nature de $\mathcal{C}_m$.
Lorsque $\mathcal{C}_m$ est un cercle, préciser les coordonnées de son centre Ω_m et son rayon.

On commencera par une chaîne d'équivalences permettant d'obtenir une équation de $\mathcal{C}_m$ sous une forme adéquate pour déterminer sa nature (en suivant le modèle de rédaction à la fin du sujet).

Pour la discussion, on rédigera selon le modèle de rédaction ci-dessous.

- Si $m > \ldots$, alors $\mathcal{C}_m$ est un cercle de centre $\Omega(\ldots.\,;\ldots.)$ et de rayon … .
- Si $m = \ldots$, alors $\mathcal{C}_m$ est … .
- Si $m < \ldots$, alors $\mathcal{C}_m$ est … .

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

2°) On suppose que $m > 0$. On se propose de déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des ordonnées.

Recopier et compléter la phrase : « Les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de l'axe $(\mathrm{O}y)$ sont les solutions de l'équation $\ldots\ldots.. = 0 \quad (1)$ ».

……

……

Compléter sans expliquer l'équivalence suivante par des égalités du type « $y = \ldots$ » :

$(1) \Leftrightarrow$ ………………………………………………………

Conclure :

Les points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de l'axe $(\mathrm{O}y)$ ont pour ordonnées …………………………………….. .

V. (2 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté *a* $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$. Exprimer la hauteur *h* en fonction de *a*.

……………….. (une seule égalité sous la forme la plus simple possible)

VI. (1 point)

Écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation $1 - x^2 \geqslant 0$.

……………….. (une seule réponse sans égalité)

Modèle de rédaction pour les équations de cercles :

Soit M un point quelconque de *P* de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ……………………………………………………………

$\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne ……………………………………………………….... .

Corrigé du contrôle du 10-5-2019

Dans les exercices **I** à **IV**, le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I.

1°) Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$. Exprimer OM^2 en fonction de x et y.

2°) Écrire une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R (R est un réel strictement positif fixé).

$\mathrm{OM}^2 = x^2 + y^2$ (une seule égalité)	$x^2 + y^2 = R^2$ (une seule égalité)

II.

On considère le point A de cordonnées $(a\,;0)$ où a est un réel donné.

1°) Calculer OA en fonction de a. Répondre sous la forme d'une égalité sans faire de phrase en présentant le calcul.

$\mathrm{OA} = \sqrt{a^2} = |\,a\,|$

2°) On suppose que $a \neq 0$. Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[\mathrm{OA}]$ (voir modèle de rédaction donné au verso, à la fin du sujet).

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$.

$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0$

$\Leftrightarrow (x-a)\times x + y \times y = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - ax = 0$

$\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - ax = 0$.

III.

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 4 et D la droite d'équation $y = 3x$.

1°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D.
Indications : On commencera par déterminer une équation de $\mathcal{C}$ puis on cherchera les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D en rédigeant ainsi : « Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation … (1) ».

$\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 = 16$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont les solutions de l'équation $x^2 + (3x)^2 = 16$ (1).

$(1) \Leftrightarrow x^2 + 9x^2 = 16$

$\Leftrightarrow 10x^2 = 16$

$\Leftrightarrow x^2 = \dfrac{16}{10}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{16}{10}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{16}{10}}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$ ou $x = -\dfrac{4}{\sqrt{10}}$ (il n'y a aucune gêne à laisser des radicaux aux dénominateurs)

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D sont $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$ et $-\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et D ont donc pour coordonnées $\left(\dfrac{4}{\sqrt{10}}\,;\dfrac{12}{\sqrt{10}}\right)$ et $\left(-\dfrac{4}{\sqrt{10}}\,;-\dfrac{12}{\sqrt{10}}\right)$.

2°) Soit D' une droite perpendiculaire à D. Quel est son coefficient directeur ? Expliquer brièvement.

On sait que le produit du coefficient directeur de D par le coefficient directeur de D' est égal à – 1.

Comme le coefficient directeur de D est égal à 3, on en déduit que le coefficient directeur de D' est égal à $-\dfrac{1}{3}$.

On vérifie le résultat graphiquement soit sur papier, soit sur la calculatrice (attention à bien se placer dans un repère orthonormé : $\boxed{\text{zoom}}$ 5 : ZCarré).

IV.

À tout réel m on associe la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation $x^2 + y^2 - 2x = m$.

1°) Discuter suivant les valeurs de m la nature de $\mathcal{C}_m$.
Lorsque $\mathcal{C}_m$ est un cercle, préciser les coordonnées de son centre Ω_m et son rayon.

On commencera par une chaîne d'équivalences permettant d'obtenir une équation de $\mathcal{C}_m$ sous une forme adéquate pour déterminer sa nature (en suivant le modèle de rédaction à la fin du sujet).

Pour la discussion, on rédigera selon le modèle de rédaction ci-dessous.

- Si $m > ...$, alors $\mathcal{C}_m$ est le cercle de centre $\Omega(....\,;....)$ et de rayon … .
- Si $m = ...$, alors $\mathcal{C}_m$ est … .
- Si $m < ...$, alors $\mathcal{C}_m$ est … .

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$$\text{M} \in \mathcal{C}_m \Leftrightarrow x^2+y^2-2x=m$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2=m$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-1+y^2=m \text{ (on utilise l'identité } x^2+2ax=(x+a)^2-a^2\text{)}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=m+1$$

Pour déterminer la nature de $\mathcal{C}_m$, on doit s'intéresser au signe de $m+1$ (essentiel).
Le signe de $m+1$ dépend de la position de m par rapport à – 1 (on peut éventuellement faire un tableau de signes).

• Si $m>-1$, alors $\mathcal{C}_m$ est $\boxed{\text{le}}$ cercle de centre $\Omega(1\,;\,0)$ et de rayon $\sqrt{m+1}$.

• Si $m=-1$, alors $\mathcal{C}_{-1}$ est le singleton constitué du point $\Omega(1\,;\,0)$.

On peut écrire $\mathcal{C}_{-1}=\{\Omega\}$ avec $\Omega(1\,;\,0)$.

Un singleton est un ensemble constitué d'un seul élément.

• Si $m<-1$, alors $\mathcal{C}_m$ est l'ensemble vide (on ne dit pas que l'ensemble n'existe pas : il existe bien mais il est vide).

On peut écrire $\mathcal{C}_m=\varnothing$.

Justification des différents cas de la discussion :

• 1er cas : $m>-1$

$$\text{M} \in \mathcal{C}_m \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=\left(\sqrt{m+1}\right)^2$$

• 2e cas : $m=-1$

$$\text{M} \in \mathcal{C}_{-1} \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ et } y=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=0$$

• 3e cas : $m<-1$

L'égalité $(x-1)^2+y^2=m+1$ est impossible.

Il n'existe pas de couple $(x\,;\,y)$ de réels qui vérifie cette égalité.

2°) On suppose que $m>0$. On se propose de déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des ordonnées.

Recopier et compléter la phrase : « Les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de l'axe $(\text{O}y)$ sont les solutions de l'équation .... $=0$ (1) ».

Les ordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de l'axe $(\text{O}y)$ sont les solutions de l'équation $y^2=m$ (1).

Compléter sans expliquer l'équivalence suivante par des égalités du type « $y=\ldots$ » :

$(1) \Leftrightarrow y=\sqrt{m}$ ou $y=-\sqrt{m}$

Conclure :

Les points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ et de l'axe $(\text{O}y)$ ont pour ordonnées $\sqrt{m}$ et $-\sqrt{m}$.

V.

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$. Exprimer la hauteur h en fonction de a.

$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (une seule égalité sous la forme la plus simple possible)

C'est un résultat de cours qui se démontre en utilisant le théorème de Pythagore ou la trigonométrie.

VI.

Écrire l'ensemble des solutions de l'inéquation $1-x^2 \geqslant 0$.

$[-1\,;\,1]$ (une seule réponse sans égalité)

Il y a plusieurs moyens : algébrique (tableau de signes, signe d'un polynôme du second degré) ou graphique (abscisses des points de la courbe de la fonction « carré » dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 1).

Un intervalle est un ensemble (c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$).