Problème

Partie 1

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1°) Vérifier à l'aide de la calculatrice que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.

2°) Démontrer que $P(D+U)P^{-1} = M$ et en déduire que pour tout entier naturel *n*, on a $P(D+U)^n P^{-1} = M^n$.

3°) a) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, calculer U^j. On pourra commencer par calculer U^2.

b) Pour tout entier naturel *k*, calculer $D^k U$. On pourra commencer par calculer DU.

c) Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour calculer $(D+U)^n$? En déduire que $(D+U)^n = (2^n - 1)U + D^n$.

Calculer D^n et en déduire $(D+U)^n$.

Indication : Utiliser la formule $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ dite « du binôme de Newton » valable pour tout couple $(A\,;B)$ de matrices carrées d'ordre 3 telles que $AB = BA$.

4°) Démontrer que pour tout entier naturel *n* on a $M^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n & 0 \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$.

Partie 2

Pour étudier les capacités d'adaptation des souris, des étudiants ont mis au point le protocole suivant. Ils placent une souris dans une boîte comportant trois issues A, B et C. Les deux premières conduisent à un cul de sac alors que la troisième conduit A un morceau de gruyère. Après que la souris a choisi son issue, les étudiants la remettent au centre de la boîte pour répéter l'expérience. Ils observent les résultats suivants :

- si la souris choisit la sortie A, elle sort la fois suivante en B ou C de façon équiprobable ;
- si elle choisit la sortie B, elle sort la fois suivante en A ou C avec la même probabilité ;
- si elle choisit la sortie C, elle la choisit de nouveau systématiquement la fois suivante.

1°) Représenter la situation par un graphe probabiliste en utilisant les états X : « La souris choisit la sortie A », Y : « La souris choisit la sortie B », Z : « La souris choisit la sortie C ».

2°) Écrire la matrice de transition E en colonnes en prenant les états X, Y, Z dans cet ordre.

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note x_n, y_n, z_n les probabilités respectives d'être dans les états X, Y, Z à la *n*-ième expérience.

À la première expérience, la souris sort par l'issue A c'est-à-dire $x_1 = 1$ et $y_1 = z_1 = 0$.

En utilisant le résultat de la partie 1, exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de *n* ($n \geqslant 1$), puis déterminer leurs limites quand *n* tend vers + ∞.