

Loi d'équilibre génétique

Étant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est **homozygote** lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa. Une plante est **hétérozygote** lorsqu'elle est de génotype Aa. Certaines plantes, le lupin par exemple, se reproduisent par autogamie (ou autofécondation) : tout se passe pour la descendance comme si on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard.

Une plante de génotype AA donne par autogamie une plante de génotype AA. De même, une plante de génotype aa donne une plante aa.

Déterminer à l'aide d'un échiquier de croisement les probabilités que la descendance de première génération d'une plante de génotype Aa soit une plante de génotype AA, Aa ou aa.

Les génotypes Aa et aA sont identiques.

1°) Représenter la situation par un graphe probabiliste en utilisant les états X : « La plante est de génotype AA », Y l'état « la plante est de génotype Aa », Z « la plante est de génotype aa ».

2°) Écrire la matrice de transition M en colonnes en prenant les états X, Y, Z dans cet ordre.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

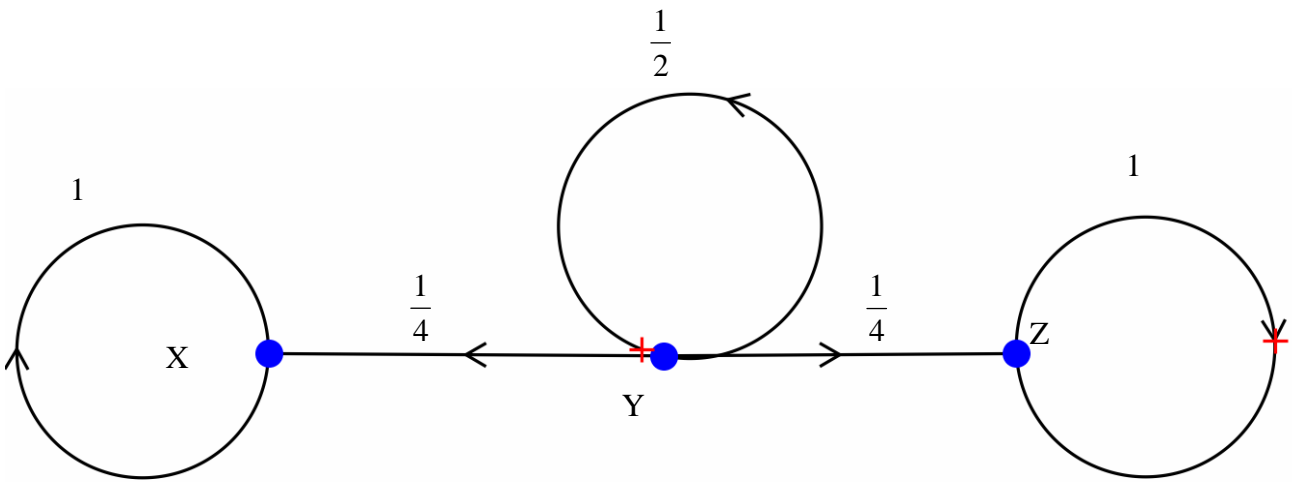
4°) Pour tout entier naturel n , on note x_n, y_n, z_n les probabilités respectives d'être dans les états X, Y, Z à la n -ième génération.

On suppose que l'on part d'une plante hétérozygote.

Exprimer x_n, y_n, z_n en fonction de n puis déterminer leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Solution

1°)



2°) $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$