1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 19 avril 2019 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

Dans tous les exercices **I**, **II**, **III**, le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On donne les points $\text{A}(3\,;-1)$ et $\text{B}(0\,;4)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O passant par A et Δ la droite passant par A et perpendiculaire à (AB).

1°) Calculer OA^2.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$. Le modèle de rédaction est donné ci-dessous.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$.

$\text{M} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow$ ………………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………

$\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne ………………………………………………………… .

3°) Déterminer une équation cartésienne de Δ. On effectuera la recherche au brouillon.

Δ a pour équation cartésienne ………………………………………………………… .

II. (6 points : 1°) 2 points + 2 points ; 2°) 2 points)

À tout réel m on associe la courbe $\mathscr{C}_m$ d'équation cartésienne $x^2+y^2+2mx-2y-1=0$.

1°) Démontrer que pour tout réel m la courbe $\mathscr{C}_m$ est un cercle. Préciser les coordonnées de son centre Ω_m.
On complétera le modèle de rédaction ci-dessous.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $(x\,;y)$.

$\text{M} \in \mathscr{C}_m \Leftrightarrow x^2+y^2+2mx-2y-1=0$

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………

$\Leftrightarrow$ ………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) On se propose de déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des ordonnées.

Recopier et compléter la phrase : « Les ordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et de l'axe $(\text{O}y)$ sont les solutions de l'équation ……..$=0$ (1) ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Compléter sans expliquer l'équivalence :

$(1) \Leftrightarrow$ ………………………………………………………

Conclure :

Les points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et de l'axe $(\text{O}y)$ ont pour ordonnées …………………………………… .

III. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère les vecteurs $\vec{u}\,(a+1\,;-1)$ et $\vec{v}\,(a-1\,;1)$ où a est un réel quelconque.

1°) Calculer $p=\vec{u}\bullet\vec{v}$ en fonction de *a*. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

……...………

……...………

……...………

2°) Déterminer le(s) réel(s) *a* tel(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences selon le modèle : « $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow$ …. ».

……...………

……...………

……...………

……...………

IV. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point + 1 point)

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ de la manière suivante :

- $u_0=0$;
- chaque terme, sauf le premier, s'obtient en multipliant le précédent par 2 et en ajoutant 1 au résultat.

Le but de l'exercice est de déterminer l'expression de u_n en fonction de *n*.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n\in\mathbb{N}$ …………………………………………….. (une seule égalité)

2°) Calculer au brouillon u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 puis conjecturer l'expression de u_n en fonction de *n*.
Rédiger selon le modèle suivant à recopier : « On peut conjecturer que $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=$..... ».

………………………………………………..……………………………………………………………

3°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n=u_n+1$.
Calculer au brouillon v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 puis conjecturer la nature de la suite (v_n) avec précision.

Il semble que (v_n) est une suite ………………….…………………………………………………………

Le but de la question est de justifier la conjecture émise.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad v_{n+1}=u_{n+1}+1$

$=$

$=$

$=$

$=$

4°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (v_n) ainsi que toutes les précisions utiles.
« D'après le calcul de la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

………………………………………………..……………………………………………………………

………………………………………………..……………………………………………………………

5°) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

……...………

……...………

……...………

……...………

……...………

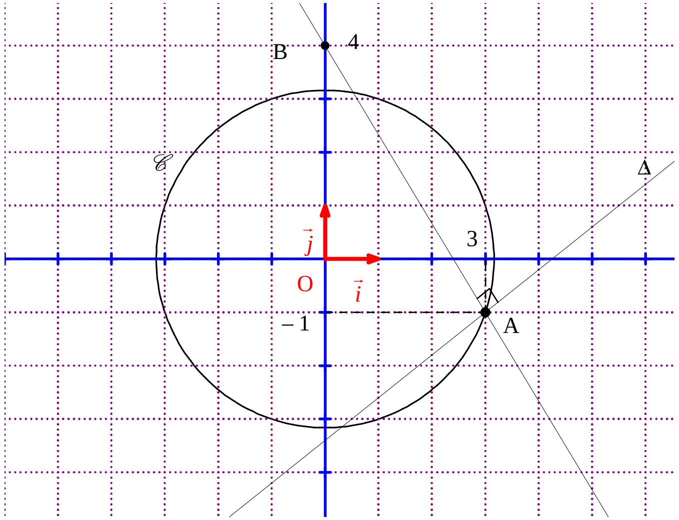
……...………

Corrigé du contrôle du 19-4-2019

Dans tous les exercices **I**, **II**, **III**, le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

I.

On donne les points $\mathrm{A}\left(3\,;-1\right)$ et $\mathrm{B}\left(0\,;4\right)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O passant par A et Δ la droite passant par A et perpendiculaire à $\left(\mathrm{AB}\right)$.



1°) Calculer OA^2.

On applique la formule fondamentale : « Le carré de la distance d'un point à l'origine du repère est égal à la somme des carrés des coordonnées ».

$$\mathrm{OA}^2 = {x_\mathrm{A}}^2 + {y_\mathrm{A}}^2$$

$$= 9 + 1$$

$$= 10$$

2°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}$. Le modèle de rédaction est donné ci-dessous.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $\left(x\,;y\right)$.

$$\mathrm{M} \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \mathrm{OM} = \mathrm{OA}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{OM}^2 = \mathrm{OA}^2$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{OM}^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10 = 0$$

$\mathscr{C}$ a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 10 = 0$.

3°) Déterminer une équation cartésienne de Δ. On effectuera la recherche au brouillon.

Δ a pour équation cartésienne $3x - 5y - 14 = 0$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left(-3\,;5\right)$

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $\left(x\,;y\right)$.

$\mathrm{M} \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ (1ère ligne sans coordonnées ; on peut aussi écrire $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ ou $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$)

$\Leftrightarrow \left(-3\right)\times\left(x-3\right)+5\times\left(y+1\right)=0$ (on utilise les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ calculées à la question 1°)

$\Leftrightarrow -3x + 5y + 14 = 0$

Δ a pour équation cartésienne $-3x + 5y + 14 = 0$ ou encore $3x - 5y - 14 = 0$.

II.

À tout réel m on associe la courbe $\mathscr{C}_m$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 2mx - 2y - 1 = 0$.

1°) Démontrer que pour tout réel m la courbe $\mathscr{C}_m$ est un cercle. Préciser les coordonnées de son centre Ω_m.
On complétera le modèle de rédaction ci-dessous.

Soit M un point quelconque de P de coordonnées $\left(x\,;y\right)$.

$M \in \mathscr{C}_m \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2mx - 2y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 2mx + y^2 - 2y - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+m)^2 - m^2 + (y-1)^2 - 1 - 1 = 0$ (on utilise les identités $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$ et $y^2 - 2by = (y-b)^2 - b^2$)

$\Leftrightarrow (x+m)^2 + (y-1)^2 = m^2 + 2$

Pour conclure que $\mathscr{C}_m$ est un cercle, on doit s'intéresser au signe de $m^2 + 2$ (essentiel).

Un carré est toujours positif ou nul donc $\forall m \in \mathbb{R} \quad m^2 + 2 > 0$ ce qui permet d'affirmer que pour tout réel m la courbe $\mathscr{C}_m$ est un cercle de centre $\Omega_m(-m\,;1)$.

2°) On se propose de déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des ordonnées.

Recopier et compléter la phrase : « Les ordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et de l'axe (Oy) sont les solutions de l'équation $........ = 0 \quad (1)$ ».

Les ordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et de l'axe (Oy) sont les solutions de l'équation $0^2 + y^2 + 2\times m\times 0 - 2y - 1 = 0$ c'est-à-dire $y^2 - 2y - 1 = 0 \quad (1)$.

On peut aussi écrire l'équation sous la forme $(0+m)^2 + (y-1)^2 = m^2 + 2$ qui donne $(y-1)^2 = 2$.

Compléter sans expliquer l'équivalence :

$(1) \Leftrightarrow y = 1 - \sqrt{2}$ ou $y = 1 + \sqrt{2}$

Conclure :

Les points d'intersection de $\mathscr{C}_m$ et de l'axe (Oy) ont pour ordonnées $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

On observe qu'il s'agit de deux points fixes (indépendants de m).

III.

On considère les vecteurs $\vec{u}\,(a+1\,;-1)$ et $\vec{v}\,(a-1\,;1)$ où a est un réel quelconque.

1°) Calculer $p = \vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de a. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$p = x_{\vec{u}} \times x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}} \times y_{\vec{v}}$

$= (a+1)\times(a-1) - 1\times 1$

$= a^2 - 1 - 1$ (on utilise une identité remarquable)

$= a^2 - 2$

2°) Déterminer le(s) réel(s) a tel(s) que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.
On rédigera sous la forme d'une chaîne d'équivalences selon le modèle : « $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow ....$ ».

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow p = 0$

$\Leftrightarrow a^2 = 2$

$\Leftrightarrow a = \sqrt{2}$ ou $a = -\sqrt{2}$

IV.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ de la manière suivante :

- $u_0 = 0$;
- chaque terme, sauf le premier, s'obtient en multipliant le précédent par 2 et en ajoutant 1 au résultat.

Le but de l'exercice est de déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \text{ (une seule égalité)}$$

2°) Calculer au brouillon u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 puis conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
Rédiger selon le modèle suivant à recopier : « On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = ...$ ».

On effectue les calculs à la main.

On peut éventuellement rentrer la suite (u_n) dans la calculatrice.

$u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, $u_4 = 15$, $u_5 = 31$

On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1$.

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + 1$.
Calculer au brouillon v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 puis conjecturer la nature de la suite (v_n) avec précision.

Il suffit d'ajouter 1 aux valeurs des premiers termes de la suite (u_n).
On obtient $v_0 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$, $v_3 = 8$, $v_4 = 16$, $v_5 = 32$.

On peut aussi utiliser la calculatrice :

$n\text{Min} = 0$
$\text{u}(n+1) = 2\text{u}(n)+1$
$\text{u}(0) = 0$
$\text{u}(1) =$
$\text{v}(\text{n}) = \text{u}+1$ ← noter la syntaxe très particulière de cette ligne (on écrit juste u et non $\text{u}(n)$)
$\text{v}(0) = 1$ ← à mettre absolument, sinon ERROR est affiché pour $n = 0$
$\text{v}(1) =$

Il semble que (v_n) est une suite géométrique de raison 2 car on passe d'un terme au suivant en multipliant par 2.

Le but de la question est de justifier la conjecture émise.
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} + 1$$

$$= 2u_n + 1 + 1 \quad \text{(utilisation de la relation de récurrence)}$$

$$= 2u_n + 2$$

$$= 2(u_n + 1)$$

$$= 2v_n$$

4°) Recopier et compléter la phrase suivante donnant la nature de la suite (v_n) ainsi que toutes les précisions utiles.
« D'après le calcul de la question précédente, la suite (v_n) est une suite … ».

D'après le calcul de la question précédente, la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 2.

5°) Exprimer v_n en fonction de *n*. En déduire l'expression de u_n en fonction de *n*.

La formule donnant le terme général d'une suite géométrique nous permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2^n$.

Or on sait que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = v_n - 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n - 1$.