**TS1 spécialité**

# Contrôle du mardi 16 avril 2019 (1 heure)

**Prénom : ……………** **Nom : …………………………………………**

**Note : …. / 20**

---

Il est demandé de ne rien écrire en dehors des réponses attendues dans les espaces prévus à cet effet.

---

## I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

Une société d'autoroute étudie l'évolution de l'état de ses automates de péage en l'absence de maintenance. Un automate peut se trouver dans l'un des états suivants : fonctionnel (état A) ; en sursis (état B) s'il fonctionne encore, mais montre des signes de faiblesse ; défaillant (état C) s'il ne fonctionne plus.
La société a observé que d'un jour sur l'autre :

- concernant les automates fonctionnels, 90 % le restent et 10 % deviennent en sursis ;
- concernant les automates en sursis 80 % le restent et 20 % deviennent défaillants.

1°) Compléter le graphe pondéré $\mathscr{G}$ ci-dessous et écrire à côté la matrice de transition en colonnes M de ce graphe.

• A  • B  • C

2°) Démontrer que le graphe $\mathscr{G}$ admet un unique état stable S que l'on déterminera.

3°) À compter d'une certaine date, la société relève chaque jour à midi l'état de ses automates.
La société observe qu'au début de l'expérience tous ses automates sont fonctionnels.
Déterminer à l'aide de la calculatrice au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient strictement supérieure à 30 %.
On donnera la réponse sans explication.

…………….. (une seule réponse sans égalité)

---

## II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

L'étude de la cohabitation de deux espèces animales, l'une étant constituée de proies, l'autre de prédateurs, conduit souvent à modéliser l'évolution (de cette cohabitation) par les relations suivantes $\begin{cases} u_{n+1} = (1+a)u_n - bu_nv_n \\ v_{n+1} = (1-d)v_n + cu_nv_n \end{cases}$ où :

$a$, $b$, $c$, $d$ sont des paramètres biologiques liés aux espèces étudiées ;
$u_n$ désigne le nombre de proies au bout de $n$ années ;
$v_n$ désigne le nombre de prédateurs au bout de $n$ années.

Dans cet exercice, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.
On note $u_n$ le nombre de campagnols et $v_n$ le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012+n$.
On précise que $a=0{,}1$, $b=0{,}001$, $c=2\times10^{-7}$ et $d=0{,}4$.

1°) Dans cette question, on estime qu'au 1er juillet 2012, il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent vingt renards. On suppose donc $u_0=2000000$ et $v_0=120$.
Rentrer les suites dans la calculatrice puis donner le nombre de renards et de campagnols au bout de 10 ans. On arrondira les résultats à l'unité.

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

2°) On reprend les mêmes hypothèses qu'à la question précédente. Décrire par des phrases l'évolution du nombre de renards et de campagnols en utilisant ce modèle pour les 25 premières années.

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………………………

3°) Est-il possible de donner à $u_0$ et $v_0$ des valeurs toutes deux non nulles afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel $n$ on ait $u_{n+1}=u_n$ et $v_{n+1}=v_n$ ? (On parle alors d'état stable).

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

---

**III. (9 points)**

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

**Partie A - Étude d'un premier milieu (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 points)**

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,005, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est 0,6.

On s'intéresse à un atome d'hydrogène dont l'état initial n'est pas précisé. On note $a_n$ la probabilité que l'atome soit dans un état stable et $b_n$ la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, $n$ nanosecondes après le début de l'observation.

On pose $\mathrm{X}_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1°) Compléter le graphe pondéré $\mathscr{G}$ ci-dessous où A et B désignent respectivement les états stable et excité puis écrire à côté la matrice de transition en colonnes M de ce graphe.


2°) On admet que pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{M}^n=\dfrac{1}{121}\begin{pmatrix} 120+0,395^n & 120\left(1-0,395^n\right) \\ 1-0,395^n & 1+120\times 0,395^n \end{pmatrix}$.

Déterminer l'état dans lequel se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme en expliquant de manière précise.

**Partie B - Étude d'un second milieu (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)**

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note $\alpha$ cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01.

1°) Écrire, en fonction de $\alpha$, la matrice de transition $\mathrm{M}'$ en colonnes dans le milieu 2.

2°) Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %.
À l'aide de ce renseignement, préciser un état stable S puis déterminer la valeur de $\alpha$.

# Corrigé du contrôle du 16-4-2019

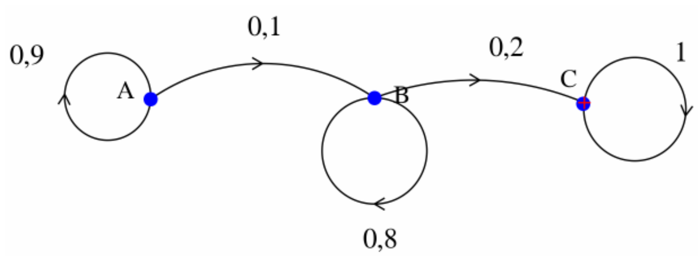
**I.**

Une société d'autoroute étudie l'évolution de l'état de ses automates de péage en l'absence de maintenance. Un automate peut se trouver dans l'un des états suivants : fonctionnel (état A) ; en sursis (état B) s'il fonctionne encore, mais montre des signes de faiblesse ; défaillant (état C) s'il ne fonctionne plus.
La société a observé que d'un jour sur l'autre :

● concernant les automates fonctionnels, 90 % le restent et 10 % deviennent en sursis ;

● concernant les automates en sursis 80 % le restent et 20 % deviennent défaillants.

1°) Compléter le graphe pondéré $\mathscr{G}$ ci-dessous et écrire à côté la matrice de transition en colonnes M de ce graphe.




Il ne faut pas oublier la boucle avec le 1 au niveau du sommet C puisqu'un automate défaillant un jour reste défaillant le jour suivant.

On se ramène à une marche aléatoire sur les sommets du graphe $\mathscr{G}$.

La matrice de transition en colonnes M du graphe $\mathscr{G}$ en prenant les états dans l'ordre A, B, C est donnée par :

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie que la somme des coefficients dans chaque colonne est égale à 1.

2°) Démontrer que le graphe $\mathscr{G}$ admet un unique état stable S que l'on déterminera.

On pose $\mathrm{S}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où $x$, $y$, $z$ sont des réels positifs ou nuls tels que $x+y+z=1$.

On cherche S telle que $\mathrm{MS}=\mathrm{S}\quad(1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,9x \\ 0,1x+0,8y \\ 0,2y+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,9x=x \\ 0,1x+0,8y=y \\ 0,2y+z=z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Il existe donc un unique état stable $\mathrm{S}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la valeur 1 ayant été trouvée grâce à la condition $x+y+z=1$.

Ce résultat est logique : si on commence avec tous les automates défaillants, alors tous les automates restent défaillants.

On peut aisément résoudre le système grâce à la calculatrice.

3°) À compter d'une certaine date, la société relève chaque jour à midi l'état de ses automates.
La société observe qu'au début de l'expérience tous ses automates sont fonctionnels.
Déterminer à l'aide de la calculatrice au bout de combien de jours la proportion d'automates défaillants devient strictement supérieure à 30 %.
On donnera la réponse sans explication.

8 (une seule réponse sans égalité)

On sait que l'état au bout de $n$ jours est donné par la matrice $\mathrm{M}^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On effectue les calculs à la calculatrice (il faut tester pour $n=2$, $n=3$ etc.) et on voit que la proportion d'automates défaillants devient strictement supérieure à 30 % au bout de 8 jours.

Pour le produit $\mathrm{M}^8\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la calculatrice donne l'affichage : $\begin{bmatrix} 0.43046721 \\ 0.26269505 \\ 0.30683774 \end{bmatrix}$.

**II.**

L'étude de la cohabitation de deux espèces animales, l'une étant constituée de proies, l'autre de prédateurs, conduit souvent à modéliser l'évolution (de cette cohabitation) par les relations suivantes $\begin{cases} u_{n+1} = (1+a)u_n - bu_nv_n \\ v_{n+1} = (1-d)v_n + cu_nv_n \end{cases}$ où :

$a$, $b$, $c$, $d$ sont des paramètres biologiques liés aux espèces étudiées ;
$u_n$ désigne le nombre de proies au bout de $n$ années ;
$v_n$ désigne le nombre de prédateurs au bout de $n$ années.

Dans cet exercice, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols.
On note $u_n$ le nombre de campagnols et $v_n$ le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012+n$.
On précise que $a = 0,1$, $b = 0,001$, $c = 2 \times 10^{-7}$ et $d = 0,4$.

1°) Dans cette question, on estime qu'au 1er juillet 2012, il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent vingt renards. On suppose donc $u_0 = 2000000$ et $v_0 = 120$.
Rentrer les suites dans la calculatrice puis donner le nombre de renards et de campagnols au bout de 10 ans. On arrondira les résultats à l'unité.

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,1u_n - 0,001u_nv_n \\ v_{n+1} = 0,6v_n + 2 \times 10^{-7}u_nv_n \end{cases}$$

On définit bien la table avec un pas de 1.

La valeur arrondie de $u_{10}$ à l'unité est 1 798 854.
La valeur arrondie de $v_{10}$ à l'unité est 91.

Selon le modèle, il y aura environ 1 798 854 renards et 91 campagnols au bout de 10 ans.

2°) On reprend les mêmes hypothèses qu'à la question précédente. Décrire par des phrases l'évolution du nombre de renards et de campagnols en utilisant ce modèle pour les 25 premières années.

On regarde la table (qui est un peu longue à charger !).

Le nombre de campagnols diminue jusqu'à la 8e année puis augmente jusqu'à la 25e année.

Le nombre de renards diminue jusqu'à la 17e année puis augmente jusqu'à la 25e année (et même au-delà).

3°) Est-il possible de donner à $u_0$ et $v_0$ des valeurs toutes deux non nulles afin que les deux populations restent stables d'une année sur l'autre, c'est-à-dire telles que pour tout entier naturel $n$ on ait $u_{n+1} = u_n$ et $v_{n+1} = v_n$ ? (On parle alors d'état stable).

D'après le cours, une condition nécessaire et suffisante pour que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ soient constantes est

$$\begin{cases} u_1 = u_0 & (1) \\ v_1 = v_0 & (2) \end{cases}.$$

Il faut préciser que $u_0$ et $v_0$ sont non nuls.

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+a)u_0 - bu_0v_0 = u_0 \\ (1-d)v_0 + cu_0v_0 = v_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} au_0 - bu_0v_0 = 0 \\ -dv_0 + cu_0v_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0(a - bv_0) = 0 \\ v_0(-d + cu_0) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - bv_0 = 0 \\ -d + cu_0 = 0 \end{cases} \quad \text{(car } u_0 \text{ et } v_0 \text{ sont non nuls)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \dfrac{d}{c} \\ v_0 = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 2000000 \\ v_0 = 100 \end{cases}$$

---

**III.**

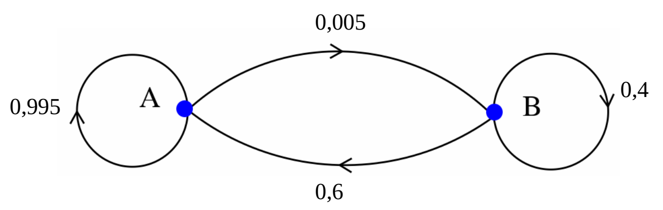
Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

**Partie A - Étude d'un premier milieu**

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,005, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est 0,6.
On s'intéresse à un atome d'hydrogène dont l'état initial n'est pas précisé. On note $a_n$ la probabilité que l'atome soit dans un état stable et $b_n$ la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, $n$ nanosecondes après le début de l'observation.

On pose $\mathrm{X}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1°) Compléter le graphe pondéré $\mathscr{G}$ ci-dessous où A et B désignent respectivement les états stable et excité puis écrire à côté la matrice de transition en colonnes M de ce graphe.



La matrice de transition en colonnes dans le milieu 1 est $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0,995 & 0,6\\ 0,005 & 0,4\end{pmatrix}$.

Cette matrice correspond au résultat donné dans la question suivante pour $n=1$.

2°) On admet que pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{M}^n=\dfrac{1}{121}\begin{pmatrix}120+0,395^n & 120\left(1-0,395^n\right)\\ 1-0,395^n & 1+120\times 0,395^n\end{pmatrix}$.
Déterminer l'état dans lequel se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme en expliquant de manière précise.

Comme $-1<0,395<1$, $0,395^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par conséquent, $\mathrm{M}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{121}\begin{pmatrix}120 & 120\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Par suite, $\mathrm{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{121}\begin{pmatrix}120 & 120\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{121}\begin{pmatrix}120\left(a_0+b_0\right)\\ a_0+b_0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{121}\begin{pmatrix}120\\ 1\end{pmatrix}$ puisque $a_0+b_0=1$.

La probabilité que l'atome d'hydrogène soit dans l'état stable tend vers $\dfrac{120}{121}$ ; la probabilité que l'atome d'hydrogène soit dans l'état excité tend vers $\dfrac{1}{121}$.

## Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note $\alpha$ cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01.

1°) Écrire, en fonction de $\alpha$, la matrice de transition $\mathrm{M}'$ en colonnes dans le milieu 2.

La matrice de transition en colonnes dans le milieu 2 est $\mathrm{M}'=\begin{pmatrix}0,99 & \alpha\\ 0,01 & 1-\alpha\end{pmatrix}$.

2°) Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %.
À l'aide de ce renseignement, préciser un état stable S puis déterminer la valeur de $\alpha$.

D'après l'information donnée, $\mathrm{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{S}=\begin{pmatrix}0,98\\ 0,02\end{pmatrix}$.

On sait d'après le cours, que S est un état stable donc $\mathrm{M}'\mathrm{S}=\mathrm{S}\quad(1)$.

$$(1)\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0,99 & \alpha\\ 0,01 & 1-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,98\\ 0,02\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,98\\ 0,02\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}0,98\times 0,99+0,02\alpha=0,98\\ 0,98\times 0,01+0,02\left(1-\alpha\right)=0,02\end{cases}$$

La première équation donne immédiatement $\alpha=0,49$.

On vérifie ensuite sans difficulté que la deuxième équation est vérifiée pour cette valeur.