1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 12 avril 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………….……………………………………….

Note : ….. / 20

I. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère un triangle ABC tel que $\text{AB}=3\sqrt{2}$ cm, $\text{AC}=5$ cm et $\widehat{\text{BAC}}=135°$.

1°) Calculer BC (valeur exacte).

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

2°) Calculer l'aire du triangle ABC.

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

…………………………………………………..…………………………………………………………………

II. (1 point)

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0=0$ et de raison $r=2$.
À l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme, calculer
$S=\sqrt{u_0}+\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}+...+\sqrt{u_{2019}}$.
On donnera la troncature au centième.

…………………………… (un seul résultat <u>sans égalité</u>)

III. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{9n^2 + 12n + 4}$.
Déterminer une expression simplifiée de u_n en justifiant soigneusement.
En déduire la nature de la suite (u_n).

....

....

....

....

....

IV. (3 points)

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = -3$.
Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

V. (3 points)

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = -2$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

……

……

……

……

……

……

……

VI. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \dfrac{4^{n-1}}{2^{2n}}$ pour tout entier naturel *n*.

Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Justifier.

……

……

……

……

……

……

……

VIII. (2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation de récurrence $2u_{n+1} = (n+1)u_n$ pour tout entier naturel *n*.

Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel afin que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ saisi en entrée, la valeur affichée en sortie soit égale à u_p.

On précise que les variables qui interviennent sont *u*, *p* et *i* avec *u* réel, *p* et *i* entiers naturels.

Entrée :
Saisir *p*

Initialisation :
u prend la valeur – 1

Traitement :
Pour *i* allant de 0 à …….. **Faire**

    u prend la valeur …………………..

FinPour

Sortie :
Afficher *u*

IX. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où *a* est un réel quelconque fixé et par la relation de récurrence $u_{n+1} = (-1)^n u_n + 1$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de *a*. On détaillera les calculs brièvement.
Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

……………………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………………………..………………………………………………………………

2°) Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2019}$.

……………………………………..….. (une seule égalité)

Consignes orales

- Formules en situation.

- Notations d'une suite (parenthèses)

- Égalités avec quantificateurs $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \ldots$

- Les barres de fractions et radicaux (exercice **III**) doivent être faits à la règle.

Corrigé du contrôle du 12-4-2019

I.

On considère un triangle ABC tel que $AB=3\sqrt{2}$ cm, $AC=5$ cm et $\widehat{BAC}=135°$.

1°) Calculer BC (valeur exacte).

D'après la « formule du côté » (formule d'Al Kashi) dans le triangle ABC, on a :

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$$

$$=\left(3\sqrt{2}\right)^2+5^2-2\times3\sqrt{2}\times5\times\cos135°$$

$$=18+25-2\times3\cancel{\sqrt{2}}\times5\times\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)$$ ($\cos135°$ est une valeur remarquable à connaître)

$$=43+30$$

$$=73$$

On en déduit que $BC=\sqrt{73}$ cm.

On n'oublie pas d'écrire l'unité (ici le centimètre).

73 n'est pas un carré parfait ; $\sqrt{73}$ ne peut pas être simplifié.

Remarques :

a. Avec la calculatrice, on trouve : $BC=8,54400374...$. On fait la vérification sur la figure.

b. On pourrait aussi noter $\widehat{A}$ l'angle $\widehat{BAC}$ car il n'y a pas d'ambiguïté.

2°) Calculer l'aire du triangle ABC.

On applique la formule donnant l'aire d'un triangle quelconque connaissant les longueurs de deux côtés et l'angle qu'ils forment.

$$\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin\widehat{BAC}$$

$$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times5\times\sin135°$$ (on ne rajoute pas de parenthèses inutiles)

$$=\frac{1}{2}\times3\cancel{\sqrt{2}}\times5\times\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$$ (135° est une valeur remarquable dont le sinus vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$=\frac{15}{2}\text{ cm}^2$$

On n'oublie pas d'écrire l'unité (ici le centimètre carré).

Autre manière de faire le calcul consistant à écrire l'unité (le centimètre) dans les calculs :

$\mathcal{A}_{\text{ABC}} = \dfrac{1}{2}\text{AB} \times \text{AC} \times \sin \widehat{\text{BAC}}$

$= \dfrac{1}{2}\left(3\sqrt{2}\ \text{cm}\right) \times \left(5\ \text{cm}\right) \times \sin 135°$ (on peut incorporer les unités dans les calculs)

$= \dfrac{1}{2}\left(3\cancel{\sqrt{2}}\ \text{cm}\right) \times \left(5\ \text{cm}\right) \times \dfrac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}$ (135° est une valeur remarquable dont le sinus vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

$= \dfrac{15}{2}\ \text{cm}^2$

On n'oublie pas d'écrire l'unité (ici le cm^2).

II.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 2$.
À l'aide de la commande de la calculatrice permettant de calculer une somme, calculer
$S = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} + \sqrt{u_2} + \ldots + \sqrt{u_{2019}}$.
On donnera la troncature au centième.

85563,39 (un seul résultat sans égalité)

Il n'y a pas de formule pour calculer la somme c'est-à-dire pour trouver une formule simplifiée.

On écrit $\displaystyle\sum_{\text{K}=0}^{2019}\left(\sqrt{2\text{K}}\right)$ (K est une variable muette, elle doit bien être la même dans l'expression et sous le symbole Σ).

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{9n^2 + 12n + 4}$.
Déterminer une expression simplifiée de u_n en justifiant soigneusement.
En déduire la nature de la suite (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{(3n+2)^2}$

$= |\, 3n+2 \,|$

$= 3n+2$ (car n est un entier naturel par hypothèse donc $3n+2$ est positif ou nul ce qui permet d'enlever les barres de valeur absolue)

On n'oublie pas d'écrire le quantificateur.

On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

IV.

Soit (u_n) la suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $q = -3$.
Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

S_n est la somme de tous les termes de u_0 à u_n. Il y a $n+1$ termes.

On applique la formule permettant de donner une expression simple de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

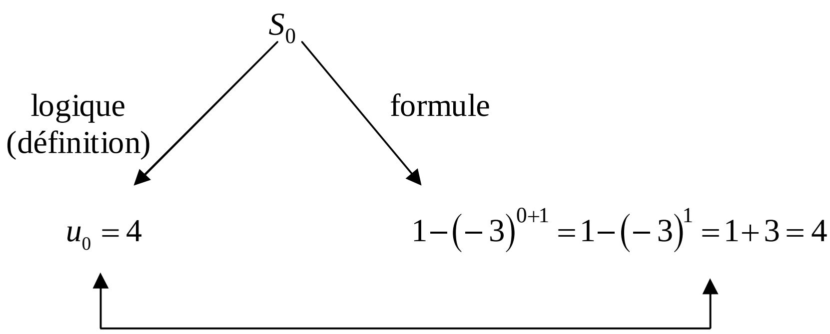
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = 4 \times \frac{1-(-3)^{n+1}}{1+3}$$

$$= \cancel{4} \times \frac{1-(-3)^{n+1}}{\cancel{4}}$$

$= 1-(-3)^{n+1}$ (on ne peut pas aller plus loin)

On n'oublie pas d'écrire le quantificateur.

On peut tester ce résultat pour $n = 0$.



On peut tester ce résultat pour $n=1$.

S_1

$S_1 = u_0 + u_1$

$1-(-3)^{1+1} = 1-(-3)^2 = 1-9 = -8$

$$\begin{aligned} u_1 &= q \times u_0 \\ &= -3 \times 4 \\ &= -12 \end{aligned}$$

$S_1 = 4 - 12 = -8$

V.

Soit (u_n) la suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}^*$ de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = -2$.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.
Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de *n*.

S_n est la somme de tous les termes de u_1 à u_n. Il y a *n* termes.
On applique la formule permettant de donner une expression simple de la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n &= n \times \frac{u_1 + u_n}{2} \\ &= n \times \frac{1+1-2(n-1)}{2} \\ &= n \times \frac{4-2n}{2} \\ &= n \times (2-n) \\ &= 2n - n^2 \end{aligned}$$

On n'oublie pas d'écrire le quantificateur.

On peut tester ce résultat pour $n=1$.

VI.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \dfrac{4^{n-1}}{2^{2n}}$ pour tout entier naturel *n*.

Que peut-on dire de la suite (u_n) ? Justifier.

On peut conjecturer le résultat à l'aide de la calculatrice mais ensuite, il faut impérativement faire un calcul littéral.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 - \frac{\cancel{4^n} \times 4^{-1}}{\cancel{4^n}} \quad (\text{car } 2^{2n} = \left(2^2\right)^n = 4^n)$$

$$= 1 - 4^{-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

On en déduit que la suite (u_n) est constante.

VIII.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et par la relation de récurrence $2u_{n+1} = (n+1)u_n$ pour tout entier naturel *n*.

Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel afin que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ saisi en entrée, la valeur affichée en sortie soit égale à u_p.

On précise que les variables qui interviennent sont *u*, *p* et *i* avec *u* réel, *p* et *i* entiers naturels.

Entrée :
Saisir *p*

Initialisation :
u prend la valeur – 1

Traitement :
Pour *i* allant de 0 à $p-1$ **Faire**
  u prend la valeur $\dfrac{(i+1)u}{2}$
FinPour

Sortie :
Afficher *u*

Pour compléter correctement l'algorithme, on remplace *p* par une valeur simple : 1.

Pour $p = 1$, on a une seule valeur dans la boucle $i = 0$.

u prend la valeur $\frac{u}{2}$ c'est-à-dire $-\frac{1}{2}$.
C'est la valeur de u_1.

IX.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où a est un réel quelconque fixé et par la relation de récurrence $u_{n+1} = (-1)^n u_n + 1$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de a. On détaillera les calculs brièvement.
Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

$u_1 = u_{0+1}$ $= (-1)^0 \times a + 1$ $= a + 1$	$u_2 = u_{1+1}$ $= (-1)^1 \times (a+1) + 1$ $= -a$	$u_3 = u_{2+1}$ $= (-1)^2 \times (-a) + 1$ $= 1 - a$	$u_4 = u_{3+1}$ $= (-1)^3 \times (1-a) + 1$ $= a$

On a une répétition de termes de 4 en 4.

La suite (u_n) est périodique de période 4 si $a \neq 0$ et de période 2 si $a = 0$.

On ne parle pas de suite redondante.

2°) Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2019}$.

$$S = 1010 \text{ (une seule égalité)}$$

S n'est pas la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.
On ne peut donc pas appliquer les formules correspondantes du cours.
Il faut donc s'y prendre de manière astucieuse en effectuant des groupes de 4 termes dans la somme.

$$S = (u_0 + u_1 + u_2 + u_3) + (u_4 + u_5 + u_6 + u_7) + ... + (u_{2016} + u_{2017} + u_{2018} + u_{2019})$$

Chaque groupe de 4 termes consécutifs vaut $\cancel{a} + 1 \cancel{-a} + 1 \cancel{-a} + \cancel{a} = 2$.

On a $2016 = 4 \times 504$.

Il y a donc 505 groupes de 4 termes.

On en déduit que $S = 505 \times 2 = 1010$.