$1^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 29 mars 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………….………….

Note : ….. / 20

I. (4 points : 2 points + 2 points)

Dans le plan *P*, on donne deux points distincts A et B. On note I le milieu de $[\mathrm{AB}]$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}}$.

Compléter par des égalités la chaîne d'équivalences dans le cadre ci-dessous.

Soit M un point quelconque de *P*.

$\mathrm{M} \in E \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}}$

$\Leftrightarrow$ ……………………….…………………..

$\Leftrightarrow$ ……………………….…………………..

$\Leftrightarrow$ ……………………….…………………..

$\Leftrightarrow$ ……………………….…………………..

À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

L'ensemble *E* est ………………………..………………………………………………………….……..……………

Faire une figure dans l'emplacement ci-dessous et tracer avec soin l'ensemble *E*.

II. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{u_n + n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme fractionnaire.
On détaillera les calculs dans les colonnes ci-dessous.

…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..

2°) Rentrer la suite dans la calculatrice. Donner la valeur arrondie au millième de u_{10}.

…………………………..

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ où *a* est un réel positif ou nul fixé et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{(u_n)^2 + (-1)^n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de *a*. On détaillera les calculs dans les colonnes ci-dessous.
Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..
…………………………..	…………………………..	…………………………..

……………………………………………………...……………………………………………………………………

2°) Dans cette question, on prend $a = 1$.
Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{2019}$.

…………………………………..….. (une seule égalité)

Expliciter la démarche justifiant le résultat précédent sur les lignes ci-dessous.

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

IV. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2(n+1)u_n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel afin que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ saisi en entrée, la valeur affichée en sortie soit égale à u_p.
On précise que les variables qui interviennent sont *u*, *p* et *i* avec *u* réel, *p* et *i* entiers naturels.

Entrée :
Saisir *p*

Initialisation :
u prend la valeur 1

Traitement :
Pour *i* allant de 0 à …….. **Faire**

u prend la valeur …………………..….

FinPour

Sortie :
Afficher *u*

2°) Est-il possible de changer la valeur de u_0 afin que la suite (u_n) soit constante ? Si oui, donner la valeur de u_0 sans explication.

……………………………………………………..…………………………………………………………………

V. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 3 points)

Lors d'un jeu qui s'effectue en *n* parties indépendantes (où *n* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1), on estime qu'un joueur a deux chances sur trois de gagner chaque partie.

1°) Dans cette question, on suppose que $n = 6$.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins la moitié des parties ?
On donnera le résultat en valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

………………………… (un seul résultat sans égalité)

2°) Dans cette question, on suppose que $n = 50$.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins la moitié des parties ?
On donnera la valeur arrondie au millième.

………………………… (un seul résultat sans égalité)

3°) Dans cette question, on revient au cas général où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On suppose que chaque partie gagnée rapporte 2 € au joueur mais que chaque partie perdue fait perdre 1 € au joueur.
On note X le nombre de parties gagnées et G le gain algébrique du joueur en euros à l'issue des *n* parties.
Exprimer G en fonction de X et de *n*.
En déduire l'espérance mathématique et la variance de G en fonction de *n*.

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

……………………………………………………..…………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 29-3-2019

I.

Dans le plan P, on donne deux points distincts A et B. On note I le milieu de $[AB]$.
Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble E des points M du plan P tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AM}$.

Compléter par des égalités la chaîne d'équivalences dans le cadre ci-dessous.

Soit M un point quelconque de P.

$\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AM}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AM}\right)=0$ (« mise en facteur »)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\left(2\overrightarrow{MI}\right)=0$ (relation $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ car I milieu de $[AB]$)

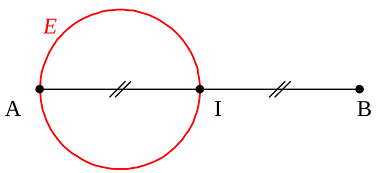
$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MI}\right)=0$ (propriété $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MI}=0$

À partir de la dernière égalité (et en l'interprétant convenablement), formuler une conclusion claire (sans employer le mot « ensemble » et sans parler du point M).

L'ensemble E est le cercle de diamètre $[AI]$.

Faire une figure dans l'emplacement ci-dessous et tracer avec soin l'ensemble E.



II.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=\dfrac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{1}{u_n+n}$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3. On donnera les résultats sous forme fractionnaire.
On détaillera les calculs dans les colonnes ci-dessous.

$u_1=u_{0+1}$ $=\dfrac{1}{u_0+0}$ $=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}$ $=2$	$u_2=u_{1+1}$ $=\dfrac{1}{u_1+1}$ $=\dfrac{1}{2+1}$ $=\dfrac{1}{3}$	$u_3=u_{2+1}$ $=\dfrac{1}{\frac{1}{3}+2}$ $=\dfrac{1}{\frac{7}{3}}$ $=\dfrac{3}{7}$

2°) Rentrer la suite dans la calculatrice. Donner la valeur arrondie au millième de u_{10}.

0,110

III.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=a$ où a est un réel positif ou nul fixé et la relation de récurrence $u_{n+1}=\sqrt{(u_n)^2+(-1)^n}$ pour tout entier naturel n.

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3 en fonction de a. On détaillera les calculs dans les colonnes ci-dessous.
Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

$u_1=u_{0+1}$ $=\sqrt{a^2+(-1)^0}$ $=\sqrt{a^2+1}$ On ne peut pas aller plus loin.	$u_2=u_{1+1}$ $=\sqrt{\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2+(-1)^1}$ $=\sqrt{a^2+1-1}$ $=\sqrt{a^2}$ $=\lvert a \rvert$ $=a$ car a est positif ou nul par hypothèse	$u_3=u_{2+1}$ $=\sqrt{a^2+1}$

(u_n) est une suite périodique de période 2.

2°) Dans cette question, on prend $a=1$.
Calculer $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{2019}$.

$S=1010\left(1+\sqrt{2}\right)$ (une seule égalité)

Expliciter la démarche justifiant le résultat précédent sur les lignes ci-dessous.

Il n'y a pas de formule à appliquer car la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
Il fallait réfléchir un peu.

Les termes d'indice pair ont tous la même valeur, les termes d'indice impair ont tous la même valeur.
On peut séparer la somme en deux : somme des termes d'indice pair + somme des termes d'indice impair.

Une autre façon consiste à regrouper les termes par 2.

$S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{2019}$ (il y a 2020 termes)

$= (u_0 + u_1) + (u_2 + u_3) + ... + (u_{2018} + u_{2019})$ (on groupe les termes par 2)

$= (1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2}) + ... + (1+\sqrt{2})$ (il y a 1010 groupes)

$= 1010(1+\sqrt{2})$ (on laisse la valeur exacte)

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2(n+1)u_n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel afin que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ saisi en entrée, la valeur affichée en sortie soit égale à u_p.
On précise que les variables qui interviennent sont *u*, *p* et *i* avec *u* réel, *p* et *i* entiers naturels.

Entrée :
Saisir *p*

Initialisation :
u prend la valeur 1

Traitement :
Pour *i* allant de 0 à $p-1$ **Faire**
  u prend la valeur $2(i+1)u$
FinPour

Sortie :
Afficher *u*

2°) Est-il possible de changer la valeur de u_0 afin que la suite (u_n) soit constante ? Si oui, donner la valeur de u_0 sans explication.

$$u_0 = 0$$

V.

Lors d'un jeu qui s'effectue en *n* parties indépendantes (où *n* désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1), on estime qu'un joueur a deux chances sur trois de gagner chaque partie.

1°) Dans cette question, on suppose que $n = 6$.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins la moitié des parties ?
On donnera le résultat en valeur exacte sous la forme d'une fraction irréductible.

$\frac{496}{729}$ (un seul résultat sans égalité)

1$^{\text{ère}}$ méthode :

On utilise directement la calculatrice en faisant : $1 - \text{binomFRép}\left(6, \frac{2}{3}, 3\right)$.

2$^{\text{e}}$ méthode :

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de parties gagnées.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = \frac{2}{3}$.

On note A l'événement : « Le joueur gagne au moins la moitié des parties ».

$$P(\text{A}) = P(\text{X} \geqslant 4)$$

$$= P(\text{X}=4) + P(\text{X}=5) + P(\text{X}=6)$$

$$= \binom{6}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{6}{5} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{6}{6} \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0$$

$$= \frac{496}{729}$$

Dans cette 2$^{\text{e}}$ méthode, on utilise la calculatrice ou le triangle de Pascal pour obtenir les coefficients binomiaux.

2°) Dans cette question, on suppose que $n = 50$.
Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins la moitié des parties ?
On donnera la valeur arrondie au millième.

0,989 (un seul résultat sans égalité)

On fait « $1 - \text{binomFRép}\left(50, \frac{2}{3}, 25\right)$ » sur la calculatrice.

3°) Dans cette question, on revient au cas général où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On suppose que chaque partie gagnée rapporte 2 € au joueur mais que chaque partie perdue fait perdre 1 € au joueur.
On note X le nombre de parties gagnées et G le gain algébrique du joueur en euros à l'issue des *n* parties.
Exprimer G en fonction de X et de *n*.
En déduire l'espérance mathématique et la variance de G en fonction de *n*.

$G = 2X - (n - X)$ (le nombre de parties gagnées est égal à $n - X$)

$= 3X - n$

On applique les formules $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

On a donc $E(G) = 3E(X) - n$.

Or $E(X) = n \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2n}{3}$ (formule de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale).

Donc $E(G) = \cancel{3} \times \dfrac{2n}{\cancel{3}} - n = n$.

On a $V(G) = 3^2 V(X)$.

Or $V(X) = n \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2n}{9}$ (formule de la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale).

On a donc $V(G) = 2n$.