TS spé

Devoir pour le jeudi 21 mars 2019

Le but du devoir est d'étudier l'équation $x^2-8y^2=1$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y)\in\mathbb{N}^2$.

Question préliminaire : Donner sans justifier deux couples solutions de (E).

On attend une rédaction précise et concise.

Partie 1

1°) Démontrer que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors nécessairement x est un nombre impair.

2°) Justifier que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors x et y sont premiers entre eux.

Partie 2

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $x_0=1$ et $y_0=0$ ainsi que par les relations de récurrence $x_{n+1}=3x_n+8y_n$ et $y_{n+1}=x_n+3y_n$.

On admettra que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont des entiers naturels et que $x_n\geqslant 1$ pour tout entier naturel n, autrement dit que $(x_n\,;\,y_n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ pour tout entier naturel n.
Ce résultat se démontre aisément par récurrence.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, ${x_n}^2-8{y_n}^2=1$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $x_n<x_{n+1}$. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de solutions.

3°) Déterminer un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2019 solution de (E).

Corrigé du DM pour le 21-3-2019

Le but du devoir est d'étudier l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ (E) d'inconnue $(x\,;\,y) \in \mathbb{N}^2$.

Il s'agit d'une équation de Pell-Fermat du nom de Pierre de Fermat (1601 ou 1607- 12 janvier 1665), magistrat, savant et mathématicien français, et de John Pell (1er mars 1611 -12 décembre 1685), diplomate et mathématicien anglais.

On appelle équation de Pell-Fermat une équation du type $x^2 - n^2y^2 = m$ d'inconnue $(x\,;\,y) \in \mathbb{N}^2$ où m est égal à 1 ou – 1 et n un entier naturel non nul.
Il s'agit d'une équation diophantienne d'un type particulier.

Partie 1

1°) Démontrer que si un couple $(x\,;\,y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors nécessairement x est un nombre impair et y est un nombre pair.

Soit $(x\,;\,y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E).

● Démontrons que x est un nombre impair.

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow x^2 = 2y^2 + 1$.

$2y^2$ est un multiple de 2 donc $2y^2$ est pair d'où $2y^2 + 1$ est impair.

Or pour tout entier relatif n, n^2 a la même parité que n.

Donc x^2 étant impair, x est impair.

● Démontrons que y est un nombre pair.

1ère méthode :

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow 2y^2 = (x-1)(x+1)$

x étant impair, $x-1$ et $x+1$ sont pairs.

$x-1$ et $x+1$ sont donc chacun divisibles par 2.

Par suite, le produit $(x-1)(x+1)$ est divisible par 4.
$2y^2$ est donc divisible par 4 d'où y^2 est divisible par 2 ce qui signifie que y^2 est pair.
Or y et y^2 ont la même parité donc y est pair.

2^e^ méthode :

On a démontré que x est impair donc il existe un entier naturel k tel que $x=2k+1$.

On a alors $x^2=4k^2+4k+1$.

Comme $(x\,;y)$ est solution de (E), on a $4k^2+4k=2y^2$ ce qui donne $y^2=2k^2+2k$ ou encore $y^2=2(k^2+k)$.

y^2 est donc pair et par conséquent, y est pair.

2°) Justifier que si un couple $(x\,;y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors x et y sont premiers entre eux.

1^ère^ méthode :

Soit $(x\,;y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E).

On a alors $x\times x+(-2y)\times y=1$.

Puisque x et $-2y$ sont des entiers relatifs, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $ux+vy=1$.

On en déduit que x et y sont premiers entre eux.

2^e^ méthode :

Soit $(x\,;y)$ un couple d'entiers naturels solution de (E).

Soit d un diviseur positif commun à x et y.

d divise x donc d divise x^2.

d divise y donc d divise $2y^2$.

Donc d divise la différence x^2-2y^2 ce qui équivaut à d divise 1 d'où $d=1$.

Ainsi, le seul diviseur positif commun à x et y est 1 donc x et y sont premiers entre eux.

Donc si un couple $(x\,;y)$ d'entiers naturels est une solution de (E), alors x et y sont premiers entre eux.

Partie 2

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes $x_0=1$ et $y_0=0$ ainsi que par les relations de récurrence $x_{n+1}=3x_n+4y_n$ et $y_{n+1}=2x_n+3y_n$.

On admettra que pour tout entier naturel n, x_n et y_n sont des entiers naturels et que $x_n\geqslant 1$ pour tout entier naturel n, autrement dit que $(x_n\,;y_n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ pour tout entier naturel n.
Ce résultat se démontre aisément par récurrence.

1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, ${x_n}^2-2{y_n}^2=1$.

Pour n entier naturel, on définit la phrase $P(n)$: « ${x_n}^2-2{y_n}^2=1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$x_0^{\ 2} - 2y_0^{\ 2} = 1^2 - 2 \times 0^2 = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $x_k^{\ 2} - 2y_k^{\ 2} = 1$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $x_{k+1}^{\ 2} - 2y_{k+1}^{\ 2} = 1$.

$$x_{k+1}^{\ 2} - 2y_{k+1}^{\ 2} = (3x_k + 4y_k)^2 - 2(2x_k + 3y_k)^2$$

$$= (3x_k + 4y_k)^2 - 2(2x_k + 3y_k)^2 = 9x_k^{\ 2} + 24x_k y_k + 16y_k^{\ 2} - 8x_k^{\ 2} - 24x_k y_k - 18y_k^{\ 2}$$

$$= x_k^{\ 2} - 2y_k^{\ 2}$$

$$= 1$$

On en déduit que $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

Par le théorème de récurrence, on en déduit que, pour tout entier naturel *n*, la phrase $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que pour tout entier naturel *n*, $x_n^{\ 2} - 2y_n^{\ 2} = 1$.

2°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $x_n < x_{n+1}$. En déduire que l'équation (E) admet une infinité de solutions.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - x_n = 3x_n + 4y_n - x_n$$

$$= 2x_n + 4y_n$$

Or $x_n > 0$ et $y_n \geqslant 0$ puisque l'on a admis que pour tout entier naturel *n*, $(x_n \,;\, y_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2x_n + 4y_n > 0$ ce qui donne $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - x_n > 0$ et par conséquent $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n < x_{n+1}$.

D'après le résultat admis, pour tout entier naturel *n*, le couple $(x_n \,;\, y_n)$ est formé d'entiers naturels et d'après la question précédente $x_n^{\ 2} - 2y_n^{\ 2} = 1$.
On en déduit que tous les couples $(x_n \,;\, y_n)$ où *n* est un entier naturel sont solutions de (E).
Ces couples sont deux à deux distincts d'après le résultat que l'on vient de démontrer.
Ils constituent donc une infinité de couples solutions pour l'équation (E).

3°) Déterminer un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017 solution de (E).

1ère méthode :

On calcule tous les termes des suites (x_n) et (y_n) jusqu'à trouver un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017.

$$x_0 = 1$$

$$y_0 = 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_0 + 4y_0 \\ &= 3\times1+4\times0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 3x_0 + 3y_0 \\ &= 2\times1+3\times0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 3x_1 + 4y_1 \\ &= 3\times3+4\times2 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 2x_1 + 3y_1 \\ &= 2\times3+3\times2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 3x_2 + 4y_2 \\ &= 3\times17+4\times12 \\ &= 99 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= 2x_2 + 3y_2 \\ &= 2\times17+3\times12 \\ &= 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= 3x_3 + 4y_3 \\ &= 3\times99+4\times70 \\ &= 577 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_4 &= 2x_3 + 3y_3 \\ &= 2\times99+3\times70 \\ &= 408 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_5 &= 3x_4 + 4y_4 \\ &= 3\times577+4\times408 \\ &= 3363 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_5 &= 2x_4 + 3y_4 \\ &= 2\times577+3\times408 \\ &= 2378 \end{aligned}$$

On peut aussi rentrer les suites dans la calculatrice.

On vérifie immédiatement tout de même.

2e méthode :

On rentre dans la calculatrice le programme correspondant à l'un des deux algorithmes suivants.

Entrée :
X prend la valeur 1
Y prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $\text{Y} < 2017$ **Faire**
    A prend la valeur $3\text{X} + 4\text{Y}$
    Y prend la valeur $2\text{X} + 3\text{Y}$
    X prend la valeur A
FinTantque

Sortie :
Afficher X
Afficher Y

Entrée :
X prend la valeur 1
Y prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $\mathrm{Y} < 2017$ **Faire**
  Y prend la valeur $2\mathrm{X} + 3\mathrm{Y}$
  X prend la valeur $\sqrt{2\mathrm{Y}^2 + 1}$
FinTantque

Sortie :
Afficher X
Afficher Y

Le programme affiche en sortie $\mathrm{X} = 3363$ et $\mathrm{Y} = 2378$.

On effectue une vérification. On remplace avec les valeurs de X et Y dans (E).

$$3363^2 - 2 \times 2378^2 = 11309\ 769 - 2 \times 5654\ 884$$

De plus, on a bien X impair et Y pair.

Donc $(3363\,;2378)$ est un couple d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2017 solution de (E).

On peut démontrer que les couples $(x_n\ ;\ y_n)$ sont les seuls couples formés d'entiers naturels solutions de (E).