TS1

Contrôle du jeudi 21 février 2019 (4 heures)

Partie commune (3 heures)

• Il est demandé de ne rien écrire sur le sujet.

• Le barème est donné sur 20.

I. (8 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point ; 6°) 2 points)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto (x+m)\ln x - x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et on note $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

2°) Déterminer la limite de f_m en 0^+. En déduire que pour tout réel m non nul, la courbe $\mathscr{C}_m$ admet une asymptote verticale que l'on précisera.

On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$.

3°) Calculer $f_m'(x)$ puis $f_m''(x)$.

4°) On suppose dans cette question que m est strictement positif.
Dans un même tableau, étudier le signe de $f_m''(x)$ et les variations de f_m' (il n'est pas demandé d'écrire les limites en 0^+ et en $+\infty$).
En déduire que f_m' admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+^*$ atteint lorsque $x = m$ et calculer $f_m'(m)$.

5°) On suppose dans cette question que $m > \dfrac{1}{\text{e}}$.
Quel est le signe de f_m' sur $\mathbb{R}_+^*$? Justifier.
En déduire le sens de variation de f_m. Former le tableau de variations de f_m avec les limites.

6°) On suppose encore dans cette question que $m > \dfrac{1}{\text{e}}$.
Démontrer que l'équation $f_m(x) = 0$ (E_m) possède une unique solution dans l'intervalle $[1 ; \text{e}]$.

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville. La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.
Aucune rédaction n'est attendue dans cet exercice. On se contentera de donner les résultats.

1°) L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :
• 40 % de la population est vaccinée ;
• 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
• 20 % de la population a contracté la grippe.
On interroge une personne au hasard dans la population.

Quelle est la probabilité qu'elle ait contracté la grippe sachant qu'elle n'a pas été vaccinée ?
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

2°) Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, 300 habitants de la ville sont interrogés au hasard.
On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

Quelle est la probabilité qu'au moins un tiers des personnes interrogées soit vaccinée ?
On donnera la valeur arrondie au millième.

III. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points)

Soit k un réel strictement positif.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = k$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{(u_{n+1})^2}{ku_n}$ pour tout entier naturel n.
On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont strictement positifs.

1°) Exprimer u_2, u_3 et u_4 en fonction de k.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.
Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme en fonction de k puis exprimer v_n en fonction de n.

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$.
Démontrer en utilisant la question 2°) que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = \dfrac{n(3-n)}{2}\ln k$.

4°) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = \ln u_n$. En déduire, à l'aide de la question précédente, l'expression de u_n en fonction de n et de k.

5°) On suppose dans cette question que $k = \text{e}$.
Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-2019}$.

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) Déterminer une écriture exponentielle des nombres complexes $u=\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$ et $v=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{4}$.
On utilisera ces deux résultats dans la suite de l'exercice.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la suite (z_n) de nombres complexes définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0=1$ et par la relation de récurrence $z_{n+1}=\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}z_n$ pour tout entier naturel n.

2°) Quelle est la nature de la suite (z_n) ? Répondre avec précision.
En déduire, à l'aide du 1°), une écriture exponentielle de z_n en fonction de n.

3°) En observant que $z_{n+1}-z_n=v\times z_n$, déterminer une écriture exponentielle de $z_{n+1}-z_n$ en fonction de n.
En déduire qu'un argument de $z_{n+1}-z_n$ est $\dfrac{(n+4)\pi}{6}$.

4°) On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
● Justifier brièvement que pour tout entier naturel n, les points A_n et A_{n+1} ne sont pas confondus.
● À l'aide du résultat de la question 3°), déterminer les entiers naturels n tels que $(\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1})$ soit parallèle à l'axe des réels puis les entiers naturels n tels que $(\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1})$ soit parallèle à l'axe des imaginaires purs.
On attend un raisonnement par équivalences.

Corrigé du bac blanc du 21-2-2019

I.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto (x+m)\ln x - x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et on note $\mathscr{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

$$\forall m \in \mathbb{R} \qquad f_m(1) = (1+m)\ln 1 - 1$$

$$= (1+m)\times 0 - 1$$

$$= -1$$

On en déduit que toutes les courbes $\mathscr{C}_m$ passent par le point $\mathrm{A}(1\,;-1)$.

> Pour trouver, on peut tracer des courbes $\mathscr{C}_m$ pour différentes valeurs de m sur l'écran de la calculatrice.

2°) Déterminer la limite de f_m en 0^+. En déduire que pour tout réel m non nul, la courbe $\mathscr{C}_m$ admet une asymptote verticale que l'on précisera.

On décompose la fonction.

$\lim\limits_{x\to 0^+} (x+m) = m$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc pour déterminer la limite du produit $(x+m)\ln x$ en 0^+ il faut discuter suivant le signe de m.

De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.

1^er^ cas : $m > 0$

Dans ce cas, $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+m)\ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x) = -\infty$.

2^e^ cas : $m < 0$

Dans ce cas, $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+m)\ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_m(x) = +\infty$.

3^e^ cas : $m = 0$

Dans ce cas, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_0(x) = x\ln x - x$.

On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x) = 0$.

D'après les deux premiers cas, pour tout réel m non nul, la courbe $\mathscr{C}_m$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

On admettra que $\lim\limits_{x\to +\infty} f_m(x) = +\infty$.

3°) Calculer $f_m'(x)$ puis $f_m''(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_m'(x) = 1\times \ln x + (x+m)\times\frac{1}{x} - 1$$

$$= \ln x \cancel{+1} + \frac{m}{x} \cancel{-1}$$

$$= \ln x + \frac{m}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f_m''(x) = \frac{1}{x} - \frac{m}{x^2}$$

$$= \frac{x-m}{x^2}$$

4°) On suppose dans cette question que m est strictement positif.
Dans un même tableau, étudier le signe de $f_m''(x)$ et les variations de f_m' (il n'est pas demandé d'écrire les limites en 0^+ et en $+\infty$).
En déduire que f_m' admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+^*$ atteint lorsque $x = m$ et calculer $f_m'(m)$.

x	0		m		$+\infty$
Signe de $x-m$		$-$	0	$+$	
Signe de x^2	0	$+$		$+$	
Signe de $f_m''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f_m'	‖	$\searrow$	$\ln m + 1$	$\nearrow$	

$$f_m'(m) = \ln m + \frac{m}{m} = \ln m + 1$$

5°) On suppose dans cette question que $m > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Quel est le signe de f_m' sur $\mathbb{R}_+^*$? Justifier.
En déduire le sens de variation de f_m. Former le tableau de variations de f_m avec les limites.

Lorsque $m > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, on a $\ln m > \ln \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ soit $\ln m > -1$ d'où $\ln m + 1 > 0$ soit $f_m'(m) > 0$.

Comme le minimum de f_m' est strictement positif, on en déduit que f_m' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_m'(x) > 0$.

La fonction f_m est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$+\infty$
Signe de $f_m'(x)$	‖	$+$	
Variations de f_m	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

6°) On suppose encore dans cette question que $m > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Démontrer que l'équation $f_m(x) = 0 \quad (\mathrm{E}_m)$ possède une unique solution dans l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$.

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		α		π
Variations de f	0	↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6}$	↘	0	↘	$-\dfrac{\pi}{2}$

C_1 : La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par propriété d'opérations sur les fonctions continue donc sa restriction à *I* est également continue.

C_2 : La fonction *f* est strictement croissante $\mathbb{R}_+^*$ sur *I*.

C_3 : 0 appartient à l'intervalle défini par les images de 1 et e puisque $f_m(1) = -1$ et $f_m(\mathrm{e}) = m$ (avec $m > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ par hypothèse).

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E_m) admet une unique solution dans *I*.

II.

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville. La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.
Aucune rédaction n'est attendue dans cet exercice. On se contentera de donner les résultats.

1°) L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.

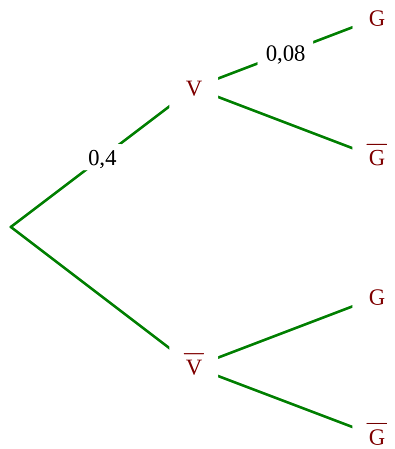
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :
• 40 % de la population est vaccinée ;
• 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
• 20 % de la population a contracté la grippe.
On interroge une personne au hasard dans la population.

Quelle est la probabilité qu'elle ait contracté la grippe sachant qu'elle n'a pas été vaccinée ?
On donnera la valeur exacte sous forme décimale.

On considère les événements V : « La personne est vaccinée » et G : « La personne a contracté la grippe ».

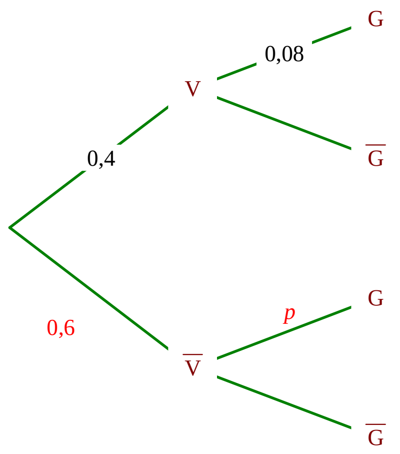
40 % de la population est vaccinée donc $P(\mathrm{V}) = 0{,}4$ et 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe donc $P(\mathrm{G}/\mathrm{V}) = 0{,}08$.

Les données de l'énoncé permettent de faire l'arbre de probabilités suivant :



On note *p* la probabilité qu'une personne ait contracté la grippe sachant qu'elle n'a pas été vaccinée.

On complète alors l'arbre de probabilités :



Les événements V et $\overline{\text{V}}$ constituent un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\text{G}) = P(\text{V} \cap \text{G}) + P(\overline{\text{V}} \cap \text{G}) \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow 0,2 = P(\text{V}) \times P(\text{G} / \text{V}) + P(\overline{\text{V}}) \times P(\text{G} / \overline{\text{V}})$$

$$\Leftrightarrow 0,2 = 0,4 \times 0,08 + 0,6 \times p$$

$$\Leftrightarrow 0,2 = 0,032 - 0,6p$$

$$\Leftrightarrow 0,6p = 0,168$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{0,168}{0,6}$$

$$\Leftrightarrow p = 0,28$$

La probabilité qu'une personne ait contracté la grippe sachant qu'elle n'a pas été vaccinée est égale à 0,28.

Autre méthode : On travaille davantage en littéral.

On écrit la formule des probabilités totales $P(\text{G}) = P(\text{V}) \times P(\text{G} / \text{V}) + P(\overline{\text{V}}) \times P(\text{G} / \overline{\text{V}})$ et on en déduit

$$P(\text{G} / \overline{\text{V}}) = \frac{P(\text{G}) - P(\text{V}) \times P(\text{G} / \text{V})}{P(\overline{\text{V}})}.$$

2°) Un laboratoire pharmaceutique mène une étude sur la vaccination contre la grippe dans cette ville.
Après la période hivernale, 300 habitants de la ville sont interrogés au hasard.
On suppose que la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la ville soit vaccinée contre la grippe est égale à 0,4.

Quelle est la probabilité qu'au moins un tiers des personnes interrogées soit vaccinée ?
On donnera la valeur arrondie au millième.

On considère l'épreuve de Bernoulli qui consiste à interroger au hasard un habitant de la ville pour laquelle le succès est l'événement S : « L'habitant est vacciné contre la grippe » de probabilité 0,4 et l'échec est l'événement $\overline{\text{S}}$: « L'habitant n'est pas vacciné contre la grippe » de probabilité 0,6.
On interroge au hasard 300 habitants de la ville, en admettant que ce choix se ramène à 300 tirages successifs avec remise c'est-à-dire que l'on effectue 300 épreuves de Bernoulli indépendantes.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès en 300 épreuves suit la loi binomiale de paramètres 300 et 0,4.

On cherche $P(\text{X} \geqslant 100)$ puisque le tiers de 300 est égal à 100.

Pour la calculatrice, on écrit $P(\text{X} \geqslant 100) = 1 - P(\text{X} \leqslant 99)$ (à l'écran, on aura 1 – binomFRép(300,0.4,99)).

Comme le paramètre 0,4 est un nombre décimal, la probabilité $P(\text{X} \geqslant 100)$ est aussi un nombre décimal.

On trouve l'affichage : 0,9926351542.

La valeur arrondie au millième de $P(\text{X} \geqslant 100)$ est donc 0,993.

On peut aussi écrire $P(\text{X} \geqslant 100) = \sum_{k=100}^{k=300} P(\text{X} = k)$ et utiliser la calculatrice.

III.

Soit k un réel strictement positif.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = k$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^2}{ku_n}$ pour tout entier naturel n.
On admet que tous les termes de la suite (u_n) existent et sont strictement positifs.

1°) Exprimer u_2, u_3 et u_4 en fonction de k.

$u_2 = \frac{(u_1)^2}{ku_0}$	$u_3 = \frac{(u_2)^2}{ku_1}$	$u_4 = \frac{(u_3)^2}{ku_2}$
$= \frac{k^2}{k}$	$= \frac{k^2}{k \times k}$	$= \frac{1}{k \times k}$
$= k$	$= 1$	$= \frac{1}{k^2}$

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.
Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme en fonction de k puis exprimer v_n en fonction de n.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \ln u_{n+2} - \ln u_{n+1}$

$$= \ln \frac{(u_{n+1})^2}{k u_n} - \ln u_{n+1}$$

$$= \ln (u_{n+1})^2 - \ln k u_n - \ln u_{n+1}$$

$$= 2 \ln u_{n+1} - \ln k u_n - \ln u_{n+1}$$

$$= \ln u_{n+1} - \ln k u_n$$

$$= \ln u_{n+1} - \ln u_n - \ln k$$

$$= v_n - \ln k$$

On en déduit que la suite (v_n) est arithmétique de premier terme $v_0 = \ln k$ et de raison $r = -\ln k$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -\ln k \times n + \ln k$

$$= \ln k (1 - n)$$

3°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$.

Démontrer en utilisant la question 2°) que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = \dfrac{n(3-n)}{2} \ln k$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = n \times \dfrac{v_0 + v_{n-1}}{2}$

$$= n \times \frac{\ln k + (2-n) \ln k}{2}$$

$$= n \times \frac{\ln k (3-n)}{2}$$

$$= \frac{n(3-n)}{2} \ln k$$

4°) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = \ln u_n$. En déduire, à l'aide de la question précédente, l'expression de u_n en fonction de n et de k.

S_n est une somme télescopique.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1}$

$= \ln u_1 - \ln u_0 + \ln u_2 - \ln u_1 + \ldots + \ln u_n - \ln u_{n-1}$ (les termes s'annulent deux à deux)

$$= -\ln u_0 + \ln u_n$$

$$= -\ln 1 + \ln u_n$$

$$= \ln u_n$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \dfrac{n(3-n)}{2} \ln k$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln u_n = \dfrac{\ln k \times n(3-n)}{2}$ ce qui donne $u_n = \mathrm{e}^{\frac{\ln k \times n(3-n)}{2}}$.

On peut aussi écrire que $u_n = k^{\frac{n(3-n)}{2}}$.

De plus, comme $u_0 = 1$ par hypothèse, on peut bien écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = k^{\frac{n(3-n)}{2}}$.

5°) On suppose dans cette question que $k = \mathrm{e}$.
Déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ puis déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-2019}$.

D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \mathrm{e}^{\frac{n(3-n)}{2}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} \underbrace{\dfrac{n(3-n)}{2}}_{X} = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \text{ par théorème de composée suite-fonction.}$$

On cherche le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-2019}$ (1).

Comme 10^{-2019} dépasse les capacités de la calculatrice, on est obligé de passer par le logarithme népérien.

$(1) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{n(3-n)}{2}} < 10^{-2019}$

$$\Leftrightarrow \frac{n(3-n)}{2} < \ln 10^{-2019}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(3-n)}{2} < -2019 \ln 10$$

On rentre la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x(3-x)}{2}$ dans la calculatrice de manière à obtenir une table dont le pas soit égal à 1 en commençant à 0.

On cherche la plus petite valeur de x entier naturel tel que $f(x) < -2019 \ln 10$ (on utilise $-2019 \ln 10 = -4648{,}91930\ldots$).

On trouve 98.

Le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 10^{-2019}$ est 98.

On peut aussi passer par une inéquation du second degré. La démarche est cependant un peu plus longue.

$(1) \Leftrightarrow n^2 - 3n - 4038 \ln 10 > 0$

Les racines du polynôme $x^2 - 3x - 4038 \ln 10$ avec x réel sont $\dfrac{3+\sqrt{9+16152\ln 10}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{9+16152\ln 10}}{2}$.

IV.

1°) Déterminer une écriture exponentielle des nombres complexes $u = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$ et $v = \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{4}$.
On utilisera ces deux résultats dans la suite de l'exercice.

On passe par la forme trigonométrique en calculant éventuellement préalablement les modules.

$$\begin{aligned} u &= \frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i} \times \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \end{aligned}$$

On vérifie les deux résultats grâce à la calculatrice.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère la suite (z_n) de nombres complexes définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $z_0 = 1$ et par la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} z_n$ pour tout entier naturel n.

2°) Quelle est la nature de la suite (z_n) ? Répondre avec précision.
En déduire, à l'aide du 1°), une écriture exponentielle de z_n en fonction de n.

D'après la relation de récurrence, (z_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$ et de premier terme $z_0 = 1$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \left(\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4}\right)^n$.

Or $\dfrac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^n$.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n > 0$, il s'agit bien d'une écriture exponentielle de z_n.

3°) En observant que $z_{n+1} - z_n = v \times z_n$, déterminer une écriture exponentielle de $z_{n+1} - z_n$ en fonction de n.
En déduire qu'un argument de $z_{n+1} - z_n$ est $\dfrac{(n+4)\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \qquad z_{n+1} - z_n &= \left(\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} - 1\right) z_n \\ &= \frac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{4} z_n \\ &= v \times z_n \end{aligned}$$

On reprend alors le résultat de la question précédente.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \qquad z_{n+1} - z_n &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{n\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+4)\pi}{6}} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n > 0$ donc cette dernière égalité donne une écriture exponentielle de $z_{n+1} - z_n$.

On en déduit qu'un argument de $z_{n+1} - z_n$ est $\dfrac{(n+4)\pi}{6}$.

4°) On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
• Justifier brièvement que pour tout entier naturel n, les points A_n et A_{n+1} ne sont pas confondus.

On a démontré que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad z_{n+1} - z_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+4)\pi}{6}}$.

Or $\forall n\in\mathbb{N}\quad \frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+4)\pi}{6}}\neq 0$.

On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}\quad z_{n+1}-z_n\neq 0$.

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}\quad z_{n+1}\neq z_n$.

On en déduit que pour tout entier naturel *n*, les points A_n et A_{n+1} ne sont pas confondus.

● À l'aide du résultat de la question 3°), déterminer les entiers naturels *n* tels que $\left(\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\right)$ soit parallèle à l'axe des réels puis les entiers naturels *n* tels que $\left(\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\right)$ soit parallèle à l'axe des imaginaires purs.
On attend un raisonnement par équivalences.

D'après la question précédente, une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\right)$ est $\frac{(n+4)\pi}{6}$.

$$\left(\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\right) \mathbin{//} (\mathrm{O}x) \Leftrightarrow \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\right)=0\ (\pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)\pi}{6}=k\pi\ (k\in\mathbb{N})\quad \text{(on se limite à } k\in\mathbb{N} \text{ puisque } \frac{(n+4)\pi}{6} \text{ est positif)}$$

$$\Leftrightarrow n=6k-4\ (k\in\mathbb{N})$$

Les entiers naturels *n* tels que $\left(\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\right)$ soit parallèle à l'axe des réels sont les entiers de la forme $6k-4$ avec *k* entier naturel non nul.

$$\left(\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\right) \mathbin{//} (\mathrm{O}y) \Leftrightarrow \left(\vec{e_1}, \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{N})$$

$$\Leftrightarrow n=6k-1\ (k\in\mathbb{N})$$

Les entiers naturels *n* tels que $\left(\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\right)$ soit parallèle à l'axe des imaginaires purs sont les entiers de la forme $6k-1$ avec *k* entier naturel non nul.