1$^{\text{ère}}$ S2

Contrôle du vendredi 8 février 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………..…………

Note : ….. / 20

I. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On pose $I = \left[2019\pi \,;\, 2020\pi\right]$.

1°) Soit x un réel quelconque appartenant à I.
Quel est le signe de $\sin x$? Répondre sans justifier.

……

2°) On note x le réel de l'intervalle I tel que $\cos x = -\dfrac{3}{5}$.

Déterminer $\sin x$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Pour tout réel x, on pose $f(x) = 3\cos x - \sin x$.

1°) Calculer $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $f(2019\pi)$.

……

……

……

……

……

……

2°) Justifier que pour tout réel x, $f(-x) = 3\cos x + \sin x$ puis que $f(x) \times f(-x) = 10\cos^2 x - 1$.

……

……

……

……

……

……

3°) Calculer $f(\pi - x)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ pour tout réel x.

……

……

……

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Donner trois réels différents tels que $\cos x = 0$.

………………………………. (répondre sans égalité, en séparant les valeurs par des virgules)

Recopier et compléter la phrase suivante : « Les réels x tels que $\cos x = 0$ sont les réels de la forme … ».

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

2°) Recopier et compléter la phrase suivante : « Les réels x tels que $\sin x = 0$ sont les réels de la forme … ».

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On se propose d'étudier le processus d'élimination de l'alcool dans le sang d'un conducteur. À l'instant initial, une prise de sang révèle un taux d'alcoolémie de 2 grammes par litre de sang.
On admet que le taux d'alcoolémie dans le sang diminue de 14 % toutes les heures.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le taux d'alcoolémie, exprimé en grammes par litre de sang, dans le sang de ce conducteur au bout de n heures. On a donc $u_0 = 2$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

…………………………………..

2°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Répondre par une phrase précise.

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

Exprimer le terme général u_n en fonction de n.
On répondra par une égalité de la forme « $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = ...$ ». La lettre n doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite de l'égalité.

…………………………………………….…….

3°) Le taux autorisé d'alcoolémie dans le sang pour conduire en France est de 0,5 g.L^{-1} maximum.
Au bout de combien de temps le conducteur pourra-t-il conduire ?
Répondre sans justifier par une phrase rédigée sur le modèle suivant à recopier et compléter : « Le conducteur pourra à nouveau conduire au bout de …. heures ».

…………………………………………………………………..……………………………………………….

V. (1 point)

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $-\dfrac{1}{3}$.

Calculer u_{2019}.

$u_{2019} =$..................

VI. (3 points)

On considère trois réels a, b, c vérifiant les conditions suivantes :
C_1 : a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ;
C_2 : leur somme est égale à 3 ;
C_3 : leur produit est égal à – 8 ;
C_4 : ils sont rangés dans l'ordre croissant.

Déterminer b en utilisant les conditions C_1 et C_2 puis a et c en utilisant les conditions C_3 et C_4.

$a =$................	$b =$................	$c =$................

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

…………………………………………………………………..……………………………………………….

Corrigé du contrôle du 8-2-2019

I.

On pose $I=[2019\pi\,;\,2020\pi]$.

1°) Soit x un réel quelconque appartenant à I.
Quel est le signe de $\sin x$? Répondre sans justifier.

$$\forall x\in I \quad \sin x\leqslant 0$$

On utilise le cercle trigonométrique pour le voir.

2°) On note x le réel de l'intervalle I tel que $\cos x=-\dfrac{3}{5}$.

Déterminer $\sin x$.

D'après la relation fondamentale, on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ d'où $\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2+\sin^2 x=1$ ce qui donne $\sin^2 x=\dfrac{16}{25}$.

On en déduit que $\sin x=\dfrac{4}{5}$ ou $\sin x=-\dfrac{4}{5}$.

Or $x\in I$ par hypothèse donc d'après le résultat de la question 1°), $\sin x\leqslant 0$.

On en déduit que $\sin x=-\dfrac{4}{5}$.

II.

Pour tout réel x, on pose $f(x)=3\cos x-\sin x$.

1°) Calculer $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $f(2019\pi)$.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{4}\right)&=3\cos\frac{3\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}\\ &=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &=-\frac{4\sqrt{2}}{2}\\ &=-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$2019\pi=2018\pi+\pi$ donc les lignes trigonométriques de 2019π sont les mêmes que celles de π.

$$\begin{aligned} f(2019\pi)&=3\cos 2019\pi-\sin 2019\pi\\ &=3\times(-1)-0\\ &=-3\end{aligned}$$

2°) Justifier que pour tout réel x, $f(-x)=3\cos x+\sin x$ puis que $f(x)\times f(-x)=10\cos^2 x-1$.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{aligned} f(-x)&=3\cos(-x)-\sin(-x)\\ &=3\cos x-(-\sin x)\\ &=3\cos x+\sin x\end{aligned}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{aligned} f(x)\times f(-x)&=(3\cos x-\sin x)(3\cos x+\sin x)\\ &=(3\cos x)^2-(\sin x)^2 \quad \text{(identité remarquable)}\\ &=9\cos^2 x-\sin^2 x\\ &=9\cos^2 x-(1-\cos^2 x) \quad \text{(on utilise la relation fondamentale de la trigonométrie)}\\ &=10\cos^2 x-1\end{aligned}$$

3°) Calculer $f(\pi-x)$ et $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ pour tout réel x.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{aligned} f(\pi-x)&=3\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\\ &=3(-\cos x)-\sin x\\ &=-3\cos x-\sin x\end{aligned}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=3\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\ &=3\sin x-\cos x\end{aligned}$$

III.

1°) Donner trois réels différents tels que $\cos x=0$.

$\dfrac{\pi}{2}\;;\;-\dfrac{\pi}{2}\;;\;\dfrac{3\pi}{2}$ (répondre sans égalité, en séparant les valeurs par des virgules)

Recopier et compléter la phrase suivante : « Les réels x tels que $\cos x=0$ sont les réels de la forme … ».

Les réels x tels que $\cos x=0$ sont les réels de la forme $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On peut aussi dire qu'il s'agit des réels de la forme $\dfrac{k\pi}{2}$ avec k entier relatif impair.

2°) Recopier et compléter la phrase suivante : « Les réels x tels que $\sin x=0$ sont les réels de la forme … ».

Les réels x tels que $\sin x=0$ sont les réels de la forme $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

IV.

On se propose d'étudier le processus d'élimination de l'alcool dans le sang d'un conducteur. À l'instant initial, une prise de sang révèle un taux d'alcoolémie de 2 grammes par litre de sang.
On admet que le taux d'alcoolémie dans le sang diminue de 14 % toutes les heures.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le taux d'alcoolémie, exprimé en grammes par litre de sang, dans le sang de ce conducteur au bout de n heures. On a donc $u_0=2$.

1°) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

$$u_{n+1}=0{,}86u_n$$

2°) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Répondre par une phrase précise.

(u_n) est une suite géométrique de raison 0,86 et de premier terme $u_0=2$.

Exprimer le terme général u_n en fonction de n.

On répondra par une égalité de la forme « $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dots$ ». La lettre n doit être la seule lettre figurant dans le membre de droite de l'égalité.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2 \times 0{,}86^n$$

3°) Le taux autorisé d'alcoolémie dans le sang pour conduire en France est de 0,5 g.L^{-1} maximum.
Au bout de combien de temps le conducteur pourra-t-il conduire ?
Répondre sans justifier par une phrase rédigée sur le modèle suivant à recopier et compléter : « Le conducteur pourra à nouveau conduire au bout de …. heures ».

Le conducteur pourra à nouveau conduire au bout de 10 heures.

On rentre la fonction $f : x \mapsto 2 \times 0{,}86^x$ définie sur $\mathbb{R}$ dans la calculatrice.

On cherche dans la table le plus petit entier naturel n tel que $f(n) < 0{,}5$.

On trouve $n = 10$.

V.

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $-\dfrac{1}{3}$.

Calculer u_{2019}.

$$u_{2019} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_{2019} = -672$$

On applique la formule donnant l'expression du terme général d'une suite arithmétique.

$$u_{2019} = 1 - \frac{1}{3} \times 2019$$

$$= -672$$

VI.

On considère trois réels a, b, c vérifiant les conditions suivantes :
C_1 : a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ;
C_2 : leur somme est égale à 3 ;
C_3 : leur produit est égal à – 8 ;
C_4 : ils sont rangés dans l'ordre croissant.

Déterminer b en utilisant les conditions C_1 et C_2 puis a et c en utilisant les conditions C_3 et C_4.

$a = -2$	$b = 1$	$c = 4$

On commence par traduire les conditions avec a, b, c.

C_1 : a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique ;
C_2 : $a + b + c = 3 \quad (1)$;
C_3 : $abc = -8 \quad (2)$;
C_4 : $a \leqslant b \leqslant c \quad (3)$.

La condition C_1 se traduit par $b = \dfrac{a+c}{2}$ (dans une suite arithmétique, chaque terme est la moyenne ou la demi-somme de ceux qui l'encadrent) qui donne immédiatement $a + c = 2b$.

(1) donne alors $2b + b = 3$ soit $3b = 3$ ce qui donne $b = 1$.

Compte tenu de la valeur de b, (1) et (2) donnent alors $a + c = 2 \quad (1')$ et $ac = -8 \quad (2')$.

On peut résoudre le système formé par les équations $(1')$ et $(2')$ (système non linéaire) ou utiliser un résultat du cours sur le second degré (détermination de deux réels connaissant la somme et le produit).

a et c sont les racines du polynôme $P(x) = x^2 - 2x - 8$.

Les racines de ce polynôme sont – 2 et 4 (discriminant réduit ou calculatrice).

Comme $a \leqslant c$, $a = -2$ et $c = 4$.

On vérifie très facilement que les trois valeurs conviennent.

Variante :

Après avoir déterminé b, on peut aussi introduire la raison r de la suite.
On a $a = 1 - r$ et $c = 1 + r$.
L'égalité (2) donne une équation vérifiée par r.
On en déduit la valeur de r (en n'oubliant pas que $r \geqslant 0$ compte tenu de la condition C_3) ce qui permet de trouver les valeurs de a et c.