TS1

Contrôle du vendredi 8 février 2019
(50 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto 2-\sqrt{\ln x}$ définie sur l'intervalle $I=[1\,;+\infty[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse e.

………………… (un seul résultat, <u>sans</u> égalité)

2°) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

…………………..… (une seule réponse sans égalité)

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$.
On note h la composée de g suivie de f (autrement dit : $h = f \circ g$).
Exprimer $h(x)$ en fonction de x sous la forme la plus simple possible.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h(x) =$ …………………………

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0$ (1) et $\ln 2 + \ln x = \ln(1-x)$ (2).

Écrire ci-dessous les ensembles S_1 et S_2 de solutions respectifs de ces deux équations (une égalité à chaque fois) puis détailler la résolution sur les lignes ci-contre. On commencera par indiquer sans justifier les ensembles de résolution.

……………………………… ………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

III. (2 points)

On place 1 euro sur un compte en banque qui rapporte 3 % d'intérêts annuels.
Durant toute la durée du placement, on ne fait aucun versement d'argent ni aucun retrait.
Au bout de combien d'années la somme disponible sur le compte dépassera-t-elle un milliard d'euros ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left| x^2 - 1 \right|$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

………

………

………

2°) Calculer $f'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\} \qquad f'(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

3°) Exprimer $f\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ en fonction de ln 2 et ln 3.

………

………

………

V. (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos\left(e^x\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Recopier et compléter les lignes ci-dessous en prenant soin de bien distinguer les x et les X :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{e^x}_{X} = \dots\dots\dots \\ \lim\limits_{X \to \dots} \cos X = \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dots\dots .$$

………

………

………

VI. (2 points)

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ en présentant comme dans l'exercice précédent.

En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VII. (2 points)

Soit ABCDEFGH un parallélépipède. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont-ils coplanaires ?
On attend une réponse justifiée, si possible sans calcul.

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 8-2-2019

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto 2-\sqrt{\ln x}$ définie sur l'intervalle $I=[1\,;+\infty[$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse e.

$$-\frac{1}{2\text{e}} \text{ (un seul résultat, \underline{sans} égalité)}$$

$\forall x \in I \quad f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

Pour déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse e, on calcule $f'(\text{e})$.

$f'(\text{e}) = -\dfrac{1}{2\text{e}\sqrt{\ln \text{e}}}$

$= -\dfrac{1}{2\text{e}\sqrt{1}}$ car $\ln \text{e} = 1$

$= -\dfrac{1}{2\text{e}}$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse e est égal à $-\dfrac{1}{2\text{e}}$.

2°) Déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

$$[1\,;\text{e}^4] \text{ (une seule réponse sans égalité)}$$

On doit résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0 \ (1)$.

Il faut tout d'abord bien noter que l'on résout cette inéquation dans l'intervalle I qui est l'ensemble de définition de la fonction f.
Cela est important pour donner l'ensemble des solutions à la fin de la résolution.

$(1) \Leftrightarrow 2-\sqrt{\ln x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\ln x} \leqslant 2$

$\Leftrightarrow \ln x \leqslant 4$

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

Compte tenu de l'ensemble de résolution de l'inéquation, on a $S = [1\,;\text{e}^4]$.

3°) On considère la fonction $g : x \mapsto \text{e}^{x^2}$.
On note h la composée de g suivie de f (autrement dit : $h = f \circ g$).
Exprimer $h(x)$ en fonction de x sous la forme la plus simple possible.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = 2-|\,x\,|$$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = f\left[g(x)\right]$

$= 2-\sqrt{\ln\left(\text{e}^{x^2}\right)}$

$= 2-\sqrt{x^2}$

$= 2-|\,x\,|$

La présence de la valeur absolue est indispensable puisque l'on sait que la racine carrée du carré d'un réel est égal à sa valeur absolue.

II.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0 \ (1)$ et $\ln 2 + \ln x = \ln(1-x) \ (2)$.

Écrire ci-dessous les ensembles S_1 et S_2 de solutions respectifs de ces deux équations (une égalité à chaque fois) puis détailler la résolution sur les lignes ci-contre. On commencera par indiquer sans justifier les ensembles de résolution.

$$S_1 = \{1\,;\text{e}^2\} \qquad\qquad S_2 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

On résout (1) dans $\mathbb{R}_+^*$.

$(1) \Leftrightarrow \ln x(\ln x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\ln x = 2$ (équation « produit nul »)

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = \text{e}^2$

Les réels 1 et e^2 appartiennent à l'ensemble de résolution.

Soit S_1 l'ensemble des solutions de (1).

$S_1 = \{1\,;\text{e}^2\}$

On peut vérifier en rentrant la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2 - 2\ln x = 0$ dans la calculatrice puis en traçant la courbe représentative.

On résout (2) dans $]0\,;1[$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \ln 2x = \ln(1-x)\\ &\Leftrightarrow 2x = 1-x\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\frac{1}{3}$ appartient à l'ensemble de résolution.

Soit S_2 l'ensemble des solutions de (2).

$$S_2 = \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

III.

On place 1 euro sur un compte en banque qui rapporte 3 % d'intérêts annuels.
Durant toute la durée du placement, on ne fait aucun versement d'argent ni aucun retrait.
Au bout de combien d'années la somme disponible sur le compte dépassera-t-elle un milliard d'euros ?

Pour tout entier naturel n, on note u_n le montant disponible sur le compte au bout de n années.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1{,}03u_n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $1{,}03$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1{,}03^n$.

On cherche les entiers naturels n tels que $u_n > 10^9 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \ln\left(1{,}03^n\right) \geqslant \ln\left(10^9\right)$ (car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$)

$\Leftrightarrow n\ln(1{,}03) \geqslant 9\ln 10$ (on peut laisser $\ln\left(10^9\right)$; cela ne change rien pour la calculatrice)

$\Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{9\ln 10}{\ln(1{,}03)}$ (en effet, $1{,}03 > 1$ donc $\ln 1{,}03 > 0$)

D'après la calculatrice, on a : $\dfrac{9\ln 10}{\ln(1{,}03)} = 701{,}08611...$.

Donc le plus petit entier naturel n qui vérifie (1) est 702.

La somme disponible sur le compte dépassera donc un milliard d'euros au bout de 702 ans.

On peut aussi rentrer la fonction $f : x \mapsto 1{,}03^x$ dans la calculatrice puis on utilise la « table » des valeurs.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left|x^2-1\right|$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 1}\underbrace{\left|x^2-1\right|}_{X} = 0^+\\ &\lim_{X\to 0^+} \ln X = -\infty\end{aligned}\right\}$$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

On vérifie la limite obtenue grâce à la calculatrice.

2°) Calculer $f'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\} \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2-1}$$

On applique la formule de dérivation $(\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$ (il n'y a plus de valeur absolue dans le résultat).

3°) Exprimer $f\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ en fonction de ln 2 et ln 3.

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) &= \ln\left|\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2-1\right|\\ &= \ln\left|\frac{4-2\sqrt{3}}{4}-1\right|\\ &= \ln\left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right|\\ &= \ln\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\\ &= \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &= \ln\sqrt{3}-\ln 2\\ &= \frac{\ln 3}{2}-\ln 2\end{aligned}$$

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos\left(\mathrm{e}^{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Recopier et compléter les lignes ci-dessous en prenant soin de bien distinguer les x et les X :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{X} = \ldots\ldots\ldots \\ \lim\limits_{X \to \ldots} \cos X = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ldots\ldots \,.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{\mathrm{e}^{x}}_{X} = 0 \\ \lim\limits_{X \to 0} \cos X = 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

On vérifie la limite obtenue grâce à la calculatrice.

VI.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ en présentant comme dans l'exercice précédent.

En déduire $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^{+}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{X} = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une composée, } \lim\limits_{x \to 0^{+}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

$$\lim\limits_{x \to 0^{+}} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to 0^{+}} \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1\right) = +\infty.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1} = 0$ (limite de l'inverse d'une fonction).

On vérifie les limites obtenues grâce à la calculatrice.

VII.

Soit ABCDEFGH un parallélépipède. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont-ils coplanaires ?
On attend une réponse justifiée, si possible sans calcul, en rédigeant convenablement.

On commence par faire une figure.

Comme ABCDEFGH est un parallélépipède, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$ (on la droit d'écrire cette égalité dans un parallélépipède).
On doit donc déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires.

Or ces vecteurs font intervenir les points D, E, G qui sont coplanaires (trois points de l'espace sont toujours de l'espace).

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires.

On utilise la propriété suivante :

Des vecteurs sont coplanaires si et seulement si ils admettent des représentants définis par des points d'un même plan.

Autre méthode (avec calculs donc un peu moins bien) :

D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EG}$.

Comme ABCDEFGH est un parallélépipède, on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$.
On peut donc écrire $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AC}$.

Cette égalité permet d'affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires.

Remarques de vocabulaire :

On ne dit pas que des points ou des vecteurs font partie d'un plan.

On ne dit pas que des vecteurs font partie d'un plan ou appartiennent à un plan.