TS1

Contrôle du samedi 19 janvier 2019 (3 heures)

I. (1 point)

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements A : « tirer un nombre pair » et B : « tirer un multiple de 3 ».
On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.
Les événements A et B sont-ils indépendants pour *P* ?

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée :

- la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu incident, est égale à 0,02 ;
- la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme ne se déclenche est égale à 0,002 ;
- la probabilité qu'un incident se produise est égale à 0,01.

> Pour tous les résultats, on attend les valeurs exactes sous forme décimale pour les questions 1°) et 2°) et sous forme de fractions irréductibles pour les questions 3°) et 4°).

On considère les événements A : « Un incident se produit » et B : « L'alarme se déclenche ».

Traduire les informations de l'énoncé sous forme d'égalités de probabilités utilisant les événements A et B.

1°) Quelle est la probabilité que l'alarme se déclenche ?
2°) Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?
3°) L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?
4°) Quelle est la probabilité que l'alarme se déclenche au cours de la journée alors que l'on sait qu'il n'y a pas incident ?

III. (4 points)

Soit *a* et *b* deux entiers naturels non nuls.

Partie 1 (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Une urne contient *a* boules blanches, *b* boules noires et une boule rouge.
Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le deuxième tirage, il ne reste donc aucune boule rouge dans l'urne).
Dans ce cas, si la boule tirée est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd.
On définit les événements A_1 : « La boule tirée au premier tirage est blanche », B_1 : « La boule tirée au premier tirage est noire », C_1 : « La boule tirée au premier tirage est rouge », A_2 : « La boule tirée au second tirage est blanche », B_2 : « La boule tirée au second tirage est noire ».
On note *P* la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
1°) Calculer la probabilité que le joueur gagne. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.
2°) On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité qu'il n'ait effectué qu'un seul tirage ?

Partie 2 (1 point)

On suppose que l'urne contient *a* boules blanches, *b* boules noires et *r* boules rouges où *r* est un entier naturel quelconque.
On reprend la même règle du jeu que dans la **partie 1**.
On note *P* la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
On note G_r l'événement « Le joueur gagne ».

On admet que pour tout entier naturel $r \geqslant 1$ on a $P\left(\text{G}_r\right) = \dfrac{a}{a+b+r} + \dfrac{r}{a+b+r} P\left(\text{G}_{r-1}\right)$.

Conjecturer l'expression de $P\left(\text{G}_r\right)$.

Bonus (1 point) : Démontrer la conjecture par récurrence sur *r*.

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On dispose d'une urne contenant des boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
1°) Calculer la probabilité de gagner lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 bleues, 6 rouges et 2 jaunes.
On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.
2°) Dans cette question, l'urne contient 6 boules bleues et d'autres boules qui sont toutes rouges.
Combien faudrait-il de boules rouges pour que la probabilité de gagner soit égale à $\dfrac{1}{2}$?

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x - \dfrac{x}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$ puis faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f* sur l'intervalle $[0\,;\pi]$. On écrira les valeurs exactes des extremums sans présenter les calculs.

Dans les questions 2°) et 3°), on considère l'équation $f(x) = 0 \quad (\text{E})$.

2°) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $I = \left[\dfrac{\pi}{3}\,;\pi\right]$ puis donner la valeur décimale approchée au millième par défaut de α.
3°) Déterminer les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.
Indication : On pourra observer que *f* est une fonction impaire.
4°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_{n+1} = 2\sin u_n$.

- La suite (u_n) est-elle monotone ? Répondre sans justifier.
- On admet que (u_n) converge vers α.

Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel *n* tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 0{,}01$. On répondra par une phrase sans justifier.

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x \mapsto \mathrm{e}^x - m(x-1)$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

2°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_m$ en A.

3°) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$. À l'aide de ce résultat, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$.

Prénom et nom : ………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (1 point)

……

……

……

……

II. (4 points)

……

Compléter le tableau ci-dessous en écrivant les réponses aux différentes questions et rédiger les réponses sur la copie.

1°)	2°)	3°)	4°)

III. (4 points)

Partie 1 (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)		Partie 2 (1 point)
1°)	2°)	

IV. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°)	2°)

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

V. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

1°) ………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

2°) ………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3°) ………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

4°) ………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 19-1-2019

I.

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les événements
A : « tirer un nombre pair » et B : « tirer un multiple de 3 ».
On modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité *P*.
Les événements A et B sont-ils indépendants pour *P* ?

On démarre sèchement les calculs des probabilités de A, B et $\text{A} \cap \text{B}$.

Il n'y a pas besoin de faire d'arbre de probabilités dans cet exercice.

Comme on est dans un cas d'équiprobabilité, on a :

$$P(\text{A}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{B}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{A} \cap \text{B}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

On constate que $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) \times P(\text{B})$.

On en déduit que A et B sont indépendants pour *P*.

II.

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur une chaîne de production. Il peut arriver toutefois que le système soit mis en défaut. En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée :

- la probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu incident, est égale à 0,02;
- la probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme ne se déclenche est égale à 0,002 ;
- la probabilité qu'un incident se produise est égale à 0,01.

Pour tous les résultats, on attend les valeurs exactes sous forme décimale pour les questions 1°) et 2°) et sous forme de fractions irréductibles pour les questions 3°) et 4°).

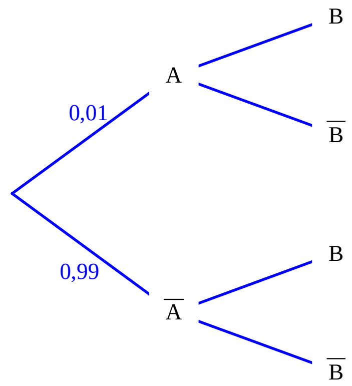
On considère les événements A : « Un incident se produit » et B : « L'alarme se déclenche ».

Traduire les informations de l'énoncé sous forme d'égalités de probabilités utilisant les événements A et B.

On note *P* la probabilité qui permet de modéliser notre situation.
On a : $P\left(\overline{\text{A}} \cap \text{B}\right) = 0{,}02$; $P\left(\text{A} \cap \overline{\text{B}}\right) = 0{,}002$; $P(\text{A}) = 0{,}01$.

La principale difficulté consiste à traduire correctement les données de l'énoncé. Lorsque l'énoncé dit « l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu incident », le sans ne se traduit pas par un « sachant ».

Il n'est pas possible de faire un arbre de probabilités (avec A, $\overline{\text{A}}$, B, $\overline{\text{B}}$) : on ne pourra pas mettre les valeurs 0,02 et 0,002 sur les branches.



1°) Quelle est la probabilité que l'alarme se déclenche ?

On doit calculer la probabilité de B.

A est la réunion des deux événements incompatibles $\text{A} \cap \text{B}$ et $\text{A} \cap \overline{\text{B}}$ (leur intersection est vide).
On peut aussi dire que B et $\overline{\text{B}}$ constituent un système complet d'événements et appliquer la formule des probabilités totales.

On a donc $P(\text{A}) = P(\text{A} \cap \text{B}) + P\left(\text{A} \cap \overline{\text{B}}\right)$ ce qui donne $P(\text{A} \cap \text{B}) = P(\text{A}) - P\left(\text{A} \cap \overline{\text{B}}\right) = 0{,}01 - 0{,}002 = 0{,}008$.

A et $\overline{\text{A}}$ constituent un système complet d'événements donc on peut appliquer la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned} P(\text{B}) &= P(\text{A} \cap \text{B}) + P\left(\overline{\text{A}} \cap \text{B}\right) \\ &= 0{,}008 + 0{,}02 \\ &= 0{,}028 \end{aligned}$$

2°) Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?

On note E l'événement « Le système d'alarme est mis en défaut ».

Le système est mis en défaut quand l'alarme se déclenche sans incident ou quand un incident se produit sans que l'alarme se déclenche.

E est donc la réunion des deux événements incompatibles $\overline{\text{A}} \cap \text{B}$ et $\text{A} \cap \overline{\text{B}}$ (leur intersection est vide).

$$\begin{aligned} P(\text{E}) &= P\left(\overline{\text{A}} \cap \text{B}\right) + P\left(\text{A} \cap \overline{\text{B}}\right) \\ &= 0{,}02 + 0{,}002 \\ &= 0{,}022 \end{aligned}$$

3°) L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

On doit calculer la probabilité de A sachant B.

On applique la définition d'une probabilité conditionnelle.

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}$$

$$=\frac{0,008}{0,028}$$

$$=\frac{2}{7}$$

Remarquons que la probabilité qu'il y ait un incident sachant que l'alarme retentit est faible ! On peut se demander si l'alarme est très fiable... à moins que l'énoncé ne soit pas très cohérent au niveau des statistiques observées.

4°) Quelle est la probabilité que l'alarme se déclenche au cours de la journée alors que l'on sait qu'il n'y a pas incident ?

On doit calculer la probabilité de B sachant $\overline{\mathrm{A}}$.

$$P(\mathrm{B}/\overline{\mathrm{A}})=\frac{P(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{A}})}{P(\overline{\mathrm{A}})}$$ (formule de définition de la probabilité conditionnelle)

$$=\frac{P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})}{1-P(\mathrm{A})}$$

$$=\frac{0,02}{1-0,01}$$

$$=\frac{2}{99}$$

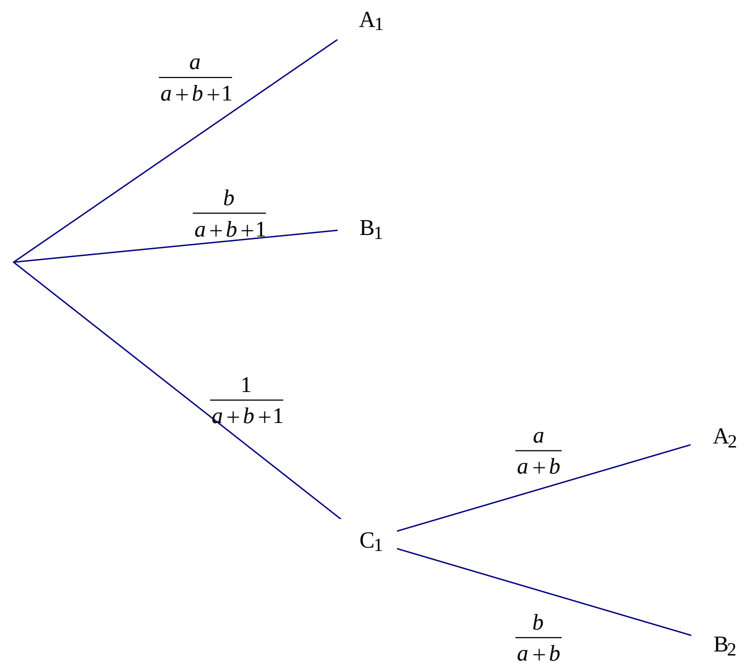
Le résultat obtenu dans cette question est plus rassurant que le précédent.

III.

Soit *a* et *b* deux entiers naturels non nuls.

Partie 1

Une urne contient *a* boules blanches, *b* boules noires et une boule rouge.
Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le deuxième tirage, il ne reste donc aucune boule rouge dans l'urne).
Dans ce cas, si la boule tirée est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd.
On définit les événements A_1 : « La boule tirée au premier tirage est blanche », B_1 : « La boule tirée au premier tirage est noire », C_1 : « La boule tirée au premier tirage est rouge », A_2 : « La boule tirée au second tirage est blanche », B_2 : « La boule tirée au second tirage est noire ».
On note *P* la probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
1°) Calculer la probabilité que le joueur gagne. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.



On note E l'événement : « Le joueur gagne. ».

E est la réunion des événements A_1 et $\mathrm{C}_1\cap\mathrm{A}_2$.

Comme ces deux événements sont incompatibles, on peut écrire :

$$P(\mathrm{E})=P(\mathrm{A}_1)+P(\mathrm{C}_1\cap\mathrm{A}_2)$$

$$=P(\mathrm{A}_1)+P(\mathrm{C}_1)\times P(\mathrm{A}_2/\mathrm{C1})$$

$$=\frac{a}{a+b+1}+\frac{1}{a+b+1}\times\frac{a}{a+b}$$

$$=\frac{a}{a+b+1}\left(1+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{a}{\cancel{a+b+1}}\times\frac{\cancel{a+b+1}}{a+b}$$

$$=\frac{a}{a+b}$$

2°) On sait que le joueur a gagné. Quelle est la probabilité qu'il n'ait effectué qu'un seul tirage ?

On cherche la probabilité conditionnelle de A_1 sachant E.

$$P\left(A_1 / E\right)=\frac{P\left(A_1 \cap E\right)}{P(E)}$$ (formule de définition de la probabilité conditionnelle)

$$=\frac{\frac{\cancel{a}}{a+b+1}}{\frac{\cancel{a}}{a+b}}$$

$$=\frac{a+b}{a+b+1}$$

Partie 2

On suppose que l'urne contient a boules blanches, b boules noires et r boules rouges où r est un entier naturel quelconque.
On reprend la même règle du jeu que dans la **partie 1**.
On note P la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire.
On note G_r l'événement « Le joueur gagne ».

On admet que pour tout entier naturel $r \geqslant 1$ on a $P\left(G_r\right)=\frac{a}{a+b+r}+\frac{r}{a+b+r} P\left(G_{r-1}\right)$.

Conjecturer l'expression de $P\left(G_r\right)$.

Bonus (1 point) : Démontrer la conjecture par récurrence sur r.

On peut conjecturer que $\forall r \in \mathbb{N} \quad P\left(G_r\right)=\frac{a}{a+b}$.

On considère la phrase $\mathcal{P}(r)$: « $P\left(G_r\right)=\frac{a}{a+b}$ » pour $r \in \mathbb{N}$.

Démontrons que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

De manière évident, on a $P\left(G_0\right)=\frac{a}{a+b}$.
On en déduit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $\mathcal{P}(k)$ soit vraie c'est-à-dire $P\left(G_k\right)=\frac{a}{a+b}$.

Démontrons qu'alors la phrase $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $P\left(G_{k+1}\right)=\frac{a}{a+b}$.

$$P\left(G_{k+1}\right)=\frac{a}{a+b+k+1}+\frac{k+1}{a+b+k+1} P\left(G_k\right)$$

$$=\frac{a}{a+b+k+1}+\frac{k+1}{a+b+k+1} \times \frac{a}{a+b}$$

$$=\frac{a \times(a+b)+(k+1) \times a}{(a+b+k+1) \times(a+b)}$$

$$=\frac{a \times \cancel{[(a+b)+(k+1)]}}{\cancel{(a+b+k+1)} \times(a+b)}$$

$$=\frac{a}{a+b}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

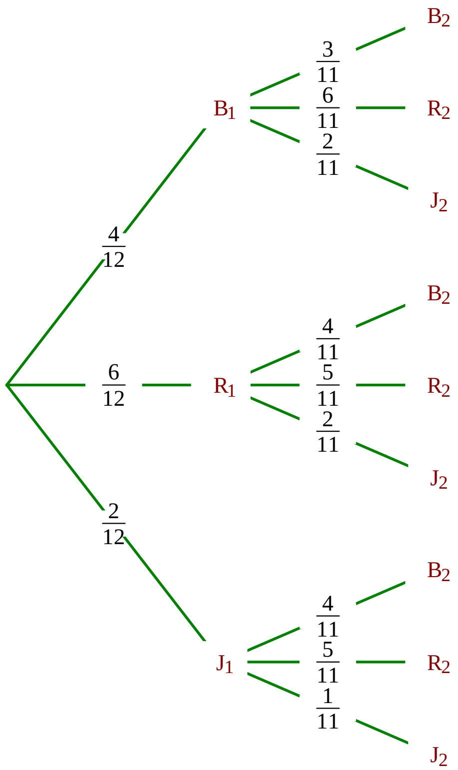
On a démontré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
D'après le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier naturel k.

IV.

On dispose d'une urne contenant des boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
1°) Calculer la probabilité de gagner lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 bleues, 6 rouges et 2 jaunes.
On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

On définit les événements suivants
B_1 : « La boule tirée au premier tirage est bleue » ;
R_1 : « La boule tirée au premier tirage est rouge » ;
J_1 : « La boule tirée au premier tirage est jaune » ;
B_2 : « La boule tirée au deuxième tirage est bleue » ;
R_2 : « La boule tirée au deuxième tirage est rouge » ;
J_2 : « La boule tirée au deuxième tirage est jaune ».

On note également G l'événement « Le joueur gagne ».



$$P(\mathrm{G}) = P(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) + P(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2) + P(\mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2)$$

$$= \frac{4}{12}\times\frac{3}{11}+\frac{6}{12}\times\frac{5}{11}+\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}$$

$$= \frac{44}{132}$$

$$= \frac{11}{33}$$

$$= \frac{1}{3}$$

2°) Dans cette question, l'urne contient 6 boules bleues et d'autres boules qui sont toutes rouges.

Combien faudrait-il de boules rouges pour que la probabilité de gagner soit égale à $\frac{1}{2}$?

On désigne par n le nombre de boules rouges dans l'urne.

On définit les événements suivants

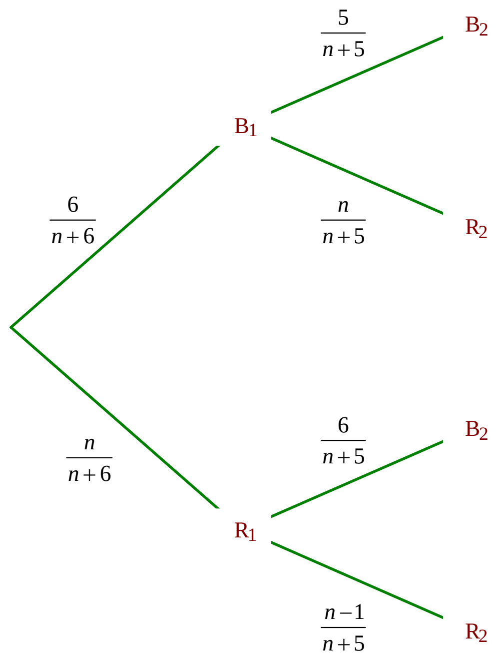
B_1 : « La boule tirée au premier tirage est bleue » ;

R_1 : « La boule tirée au premier tirage est rouge » ;

B_2 : « La boule tirée au deuxième tirage est bleue » ;

R_2 : « La boule tirée au deuxième tirage est rouge » ;

On note également G l'événement « Le joueur gagne ».



$$P(\mathrm{G}) = P(\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) + P(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2)$$

$$= \frac{6}{n+6}\times\frac{5}{n+5}+\frac{n}{n+6}\times\frac{n-1}{n+5}$$

$$= \frac{30+n(n-1)}{(n+6)(n+5)}$$

$$= \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}$$

On cherche les entiers naturels n tels que $P(\mathrm{G}) = \frac{1}{2}$ (1).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{n^2-n+30}{(n+6)(n+5)}=\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\left(n^2-n+30\right)=(n+6)(n+5)$$
$$\Leftrightarrow 2\left(n^2-n+30\right)=n^2+11n+30$$
$$\Leftrightarrow n^2-13n+30=0$$
$$\Leftrightarrow n=3 \text{ ou } n=10 \quad \text{(résolution par discriminant ou grâce à la calculatrice)}$$

Les entiers naturels cherchés sont 3 et 10.

Remarque :
On peut effectuer la résolution de l'équation $\frac{6}{n+6}\times\frac{5}{n+5}+\frac{n}{n+6}\times\frac{n-1}{n+5}=\frac{1}{2}$ grâce à la calculatrice.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x - \frac{x}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1°) Calculer $f'(x)$ puis faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f* sur l'intervalle $[0\,;\pi]$. On écrira les valeurs exactes des extremums sans présenter les calculs.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x)=\cos x-\frac{1}{2}$

Pour étudier le signe de $f'(x)$ dans l'intervalle $[0\,;\pi]$, on utilise le cercle trigonométrique.

$2\cos x-1>0 \quad (1)$	$2\cos x-1<0 \quad (2)$	$2\cos x-1=0 \quad (3)$
$(1) \Leftrightarrow \cos x>\frac{1}{2}$	$(2) \Leftrightarrow \cos x<\frac{1}{2}$	$(3) \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow 0 \leqslant x<\frac{\pi}{3}$	$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}<x \leqslant \pi$	$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de *f*	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

$f(0)=0$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}-\frac{\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}$

$f(\pi)=-\frac{\pi}{2}$

Dans les questions 2°) et 3°), on considère l'équation $f(x)=0 \quad (\mathrm{E})$.

2°) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle $I=\left[\frac{\pi}{3}\,;\pi\right]$ puis donner la valeur décimale approchée au millième par défaut de α.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		α		π
Variations de *f*	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

C_1 : La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ par propriété d'opérations sur les fonctions continues donc sa restriction à *I* est également continue.

C_2 : La fonction *f* est strictement décroissante sur *I*.

C_3 : 0 appartient à l'intervalle défini par les images de $\frac{\pi}{3}$ et π.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution α dans *I*.

La commande de résolution des équations sur la calculatrice (touche $\boxed{\text{résol}}$) fournit $\alpha=1{,}89549426703...$.

La valeur décimale approchée au millième par défaut de α est 1,895

3°) Déterminer les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.
Indication : On pourra observer que *f* est une fonction impaire.

On démontre d'abord que la fonction *f* est impaire c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x)=-f(x)$.

On démontre ensuite que si x_0 est solution de (E) alors $\sin x_0=\frac{x_0}{2}$.
Or le sinus de n'importe quel réel est compris entre – 1 et 1 au sens large.
On a donc $-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$.
Par conséquent, $-2 \leqslant x_0 \leqslant 2$.

On cherche donc les solutions de (E) dans l'intervalle $[-2\,;2]$. On observe que cet intervalle est inclus dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

On peut éventuellement dresser le tableau de variations de *f* sur $[-\pi\,;\pi]$.

Dans l'intervalle $[0\,;\pi]$, l'équation (E) admet 0 et α. Pour solutions.

Dans l'intervalle $[-\pi\,;0]$, l'équation (E) admet 0 et une autre solution β dont on démontre facilement grâce au fait que *f* est impaire qu'elle est égale $-\alpha$.

Conclusion : Les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ sont α, $-\alpha$ et 0.

x	$-\pi$	$-\alpha$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	α	π
Variations de f	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0 ↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$ ↗	0 ↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$ ↘	0 ↘	$-\frac{\pi}{2}$

4°) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=1$ et la relation de récurrence $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}=2\sin u_n$.

La suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
On ne cherche pas à exprimer u_n en fonction de n.

• La suite (u_n) est-elle monotone ? Répondre sans justifier.

D'après la calculatrice, la suite (u_n) n'est pas monotone.

• On admet que (u_n) converge vers α.
Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier naturel n tel que $|u_n-\alpha|\leqslant 0,01$. On répondra par une phrase sans justifier.

On calcule $|u_n-\alpha|$ en remplaçant n par 0, 1, 2…
On prend à chaque fois une valeur approchée de u_n et de α la plus précise possible.

On trouve $n=8$.

VI.

À tout réel m on associe la fonction $f_m : x\mapsto \mathrm{e}^x - m(x-1)$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

$\forall m\in\mathbb{R}\quad f_m(1)=\mathrm{e}^1-m(1-1)=\mathrm{e}$

On en déduit que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par le point $\mathrm{A}(1\,;\,\mathrm{e})$.

> Pour trouver, on peut tracer des courbes $\mathcal{C}_m$ pour différentes valeurs de m sur l'écran de la calculatrice.

2°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_m$ en A.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f_m\,'(x)=\mathrm{e}^x-mx$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_m$ en A est $f_m\,'(1)=\mathrm{e}-m$.

3°) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$. À l'aide de ce résultat, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$.

Lorsque $m=0$, il n'y a pas de forme indéterminée. On trouve tout de suite $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=+\infty$.

De même, lorsque $m<0$.

En revanche, lorsque $m\geqslant 0$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

La méthode que nous présentons ci-après permet de lever l'indétermination et marche également dans les deux autres cas.
On développe l'expression de $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)$ puis on effectue une réécriture en forçant la factorisation par x des deux premiers termes.

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f_m(x)=x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-m\right)+m$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-m\right)=+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-m\right)\right]=+\infty$ puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x)=+\infty$.