TS1 spécialité

Contrôle du mardi 15 janvier 2019 (50 minutes)

Prénom : …………… **Nom : …………………………………………**

Note : …. / 20

Dans les exercices **I** et **II**, n et p désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

I. Question de cours (1 point)

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels telles que B soit inversible.

Recopier et compléter la propriété : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \left(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{AB}\right)^k = $.............................. .

…..……………………………………………………………………………………

II. Question de cours (1 point)

Soit A, B, C trois matrices à coefficients réels.
On suppose que :

- A est carrée d'ordre n ;
- A est inversible ;
- B et C sont des matrices rectangulaires avec n lignes et p colonnes.

Recopier et compléter l'équivalence : $\mathrm{AB} = \mathrm{C} \Leftrightarrow \mathrm{B} = ...$

…..……………………………………………………………………………………

III. (3 points)

Compléter en écrivant les coefficients manquants.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & ... \\ -1 & .... & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ... & ... \\ -2 & ... & ... \end{pmatrix}$$

IV. (3 points)

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe fixé.

Préciser pour quelles valeurs de a la matrice A est inversible et écrire la matrice A^{-1} sans justifier.

…..………

…..………

V. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe fixé.

1°) Calculer A^2 et A^3 en fonction de a. On donnera les résultats sans explication.

2°) Conjecturer une formule pour A^k, k étant un entier naturel quelconque.
On formulera cette conjecture sous la forme : « On peut conjecturer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathrm{A}^k = ...$ ».

3°) On suppose que la conjecture précédente est vraie.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{S} = \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \mathrm{A}^3 + ... + \mathrm{A}^n$.
Écrire la matrice S en fonction de n et de a.

VI. (4 points : 2 points + 2 points)

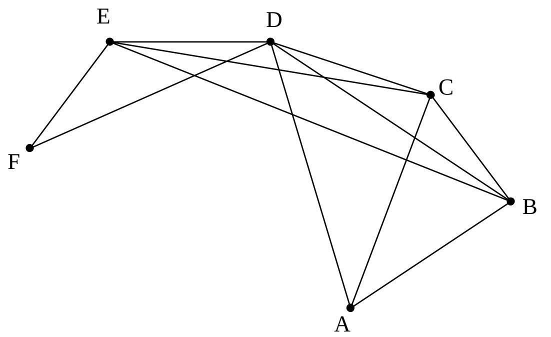
Écrire directement sans détailler la matrice A carrée d'ordre 3 telle que pour tout couple $(i,\ j)$ d'entiers naturels compris entre 1 et 3 au sens large, le coefficient situé sur la ligne *i* et dans la colonne *j*, noté $a_{i,\ j}$, est défini par $a_{i,\ j}=(-1)^{i+j}$.

Parmi les trois égalités ci-dessous, entourer celle qui est vraie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

$\mathrm{A}^n=3^n\mathrm{A}$ $\qquad$ $\mathrm{A}^n=3^{n-1}\mathrm{A}$ $\qquad$ $\mathrm{A}^n=3^{n+1}\mathrm{A}$

VII. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E et F.
Cela conduit au graphe ci-dessous dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes.



1°) En considérant les sommets par ordre alphabétique, écrire ci-contre, sans justification, la matrice d'adjacence M de ce graphe.

2°) Combien y a-t-il d'itinéraires possibles pour aller de la ville B à la ville F en faisant exactement deux escales ? exactement cinq escales ? On précise que l'on peut repasser par le même point.

Répondre par deux phrases sans justification.

………

………

………

………

Écrire tous les itinéraires possibles pour aller de la ville à B à la ville F en faisant exactement deux escales.

………

………

Corrigé du contrôle du 15-1-2019

Dans les exercices **I** et **II**, n et p désignent des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

I. Question de cours

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients réels telles que B soit inversible.

Recopier et compléter la propriété : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \left(\text{B}^{-1}\text{AB}\right)^k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left(\text{B}^{-1}\text{AB}\right)^k = \text{B}^{-1}\text{A}^k\text{B}$$

II. Question de cours

Soit A, B, C trois matrices à coefficients réels.
On suppose que :

- A est carrée d'ordre n ;
- A est inversible ;
- B et C sont des matrices rectangulaires avec n lignes et p colonnes.

Recopier et compléter l'équivalence : $\text{AB} = \text{C} \Leftrightarrow \text{B} = \ldots$.

$$\text{AB} = \text{C} \Leftrightarrow \text{B} = \text{A}^{-1}\text{C}\,.$$

III.

Compléter en écrivant les coefficients manquants.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

IV.

On pose $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe fixé.

Préciser pour quelles valeurs de a la matrice A est inversible et écrire la matrice A^{-1} sans justifier.

$\det \text{A} = 1 + a^2$

A inversible $\Leftrightarrow \det \text{A} \neq 0$

$\Leftrightarrow 1 + a^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq \text{i}$ $\boxed{\text{et}}$ $a \neq -\text{i}$ (il s'agit bien d'un « et » et non d'un « ou »)

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus \{\text{i}\,;-\text{i}\} \quad \text{A}^{-1} = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

V.

On pose $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où a est un nombre complexe fixé.

1°) Calculer A^2 et A^3 en fonction de a. On donnera les résultats sans explication.

$$\text{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2°) Conjecturer une formule pour A^k, k étant un entier naturel quelconque.
On formulera cette conjecture sous la forme : « On peut conjecturer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{A}^k = \ldots\ldots$ ».

On peut conjecturer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \text{A}^k = \begin{pmatrix} 1 & ka \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On regarde les matrices $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut continuer à calculer d'autres puissances de A jusqu'à pouvoir deviner une formule.

3°) On suppose que la conjecture précédente est vraie.
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $\text{S} = \text{A} + \text{A}^2 + \text{A}^3 + \ldots + \text{A}^n$.
Écrire la matrice S en fonction de n et de a.

$$\text{S} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+1+\ldots+1 & a+2a+\ldots+na \\ 0 & 1+1+\ldots+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n & a\left(1+2+\ldots+n\right) \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} n & \dfrac{n\left(n+1\right)a}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

On utilise la formule de somme du cours $1+2+\ldots+n = \dfrac{n\left(n+1\right)}{2}$.

VI.

Écrire directement sans détailler la matrice A carrée d'ordre 3 telle que pour tout couple $(i,\ j)$ d'entiers naturels compris entre 1 et 3 au sens large, le coefficient situé sur la ligne i et dans la colonne j, noté $a_{i,\ j}$, est défini par $a_{i,\ j}=(-1)^{i+j}$.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On remplace successivement i et j par 1, 2, 3. Par exemple, $a_{1,1}=(-1)^{1+1}=(-1)^2=1$.
Ainsi le coefficient situé sur la ligne 1 et dans la colonne 1 est égal à 1.

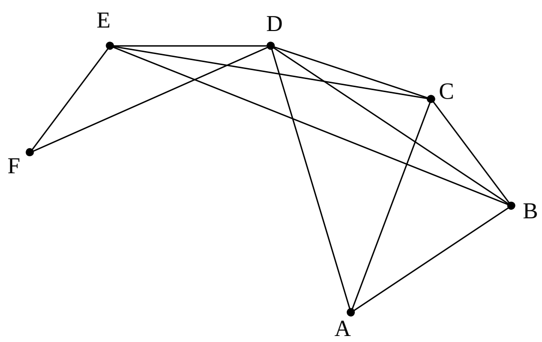
Parmi les trois égalités ci-dessous, entourer celle qui est vraie pour tout entier naturel $n\geqslant 1$.

$\mathrm{A}^n=3^n\mathrm{A}$ $\qquad$ $\mathrm{A}^n=3^{n-1}\mathrm{A}$ $\qquad$ $\mathrm{A}^n=3^{n+1}\mathrm{A}$

La méthode consiste à calculer les matrices A^2, A^3, A^4 … (éventuellement à la calculatrice) jusqu'à pouvoir deviner une formule.

VII.

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E et F.
Cela conduit au graphe ci-dessous dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes.



1°) En considérant les sommets par ordre alphabétique, écrire ci-contre, sans justification, la matrice d'adjacence M de ce graphe.

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté.

2°) Combien y a-t-il d'itinéraires possibles pour aller de la ville B à la ville F en faisant exactement deux escales ? exactement cinq escales ? On précise que l'on peut repasser par le même point.

Répondre par deux phrases sans justification.

Pour déterminer les itinéraires possibles pour aller de la ville B à la ville F en faisant exactement deux escales, on cherche les chemins de longueur 3 menant de B à F. On calcule donc M^3 et on regarde le coefficient situé sur la 2^e ligne et dans la 6^e colonne.

Pour déterminer les itinéraires possibles pour aller de la ville B à la ville F en faisant exactement cinq escales, on cherche les chemins de longueur 6 menant de B à F. On calcule donc M^6 et on regarde le coefficient situé sur la 2^e ligne et dans la 6^e colonne.

Il y a 5 itinéraires possibles pour aller de la ville B à la ville F en faisant exactement deux escales.

Il y a 353 itinéraires possibles pour aller de la ville B à la ville F en faisant exactement cinq escales.

Écrire tous les itinéraires possibles pour aller de la ville à B à la ville F en faisant exactement deux escales.

B - C - E - F
B - D - E - F
B - C - D - F
B - A - D - F
B - E - D – F