TS1

Contrôle du vendredi 11 janvier 2019 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : …….. **/ 20**

I. (6 points : 1°) 3 points ; 2°) 3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en détaillant.

En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ en ne donnant le détail que pour la première limite.

En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

II. (4 points)

Déterminer $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{1}{\sin 3x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x-1}{\sin^2 x}$ en détaillant la démarche.

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit m un réel strictement supérieur à 1.

On considère la fonction $f_m : x \mapsto (x+1)^5 - mx(x^2-2)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$ en détaillant la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) On considère la fonction $g_m : x \mapsto \dfrac{f_m(x)}{x^5-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_m(x)$ en détaillant la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (3 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ en détaillant la démarche.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 11-1-2019

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en détaillant.
En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1-x} = 0\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

On vérifie ce résultat en traçant la courbe sur la calculatrice.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ en ne donnant le détail que pour la première limite.
En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 1^+} \mathrm{e}^x = \mathrm{e} \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty.$$

On peut éventuellement faire un tableau de signes pour $1-x$.

De le même manière, on obtient $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.
Ces deux limites permettent d'affirmer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ d'équation $x = 1$ pour asymptote verticale.

II.

Déterminer $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{1}{\sin 3x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x-1}{\sin^2 x}$ en détaillant la démarche.

$\lim\limits_{x \to \pi^+} \sin 3x = 0^-$ (le signe – placé en exposant est facile à trouver en raisonnant grâce au cercle trigonométrique)

donc $\lim\limits_{x \to \pi^+} \dfrac{1}{\sin 3x} = -\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0} (3x-1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0} \sin^2 x = 0^+\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x-1}{\sin^2 x} = -\infty.$$

On peut retrouver ces deux limites graphiquement grâce à la calculatrice.

III.

Soit m un réel strictement supérieur à 1.
On considère la fonction $f_m : x \mapsto (x+1)^5 - mx\left(x^2-2\right)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x)$ en détaillant la démarche.

f_m est une fonction polynôme.
On cherche son monôme de plus haut degré.

Il n'y a pas obligation de développer complètement l'expression de $f_m(x)$.

Il suffit d'observer que le monôme de plus haut degré du développement de $(x+1)^5$ est x^5.
De même, le monôme de plus haut degré du développement de $mx\left(x^2-2\right)^2$ est mx^5.
Le monôme de plus haut degré qui apparaît dans le développement de $f_m(x)$ est donc $(1-m)x^5$.

On sait que $m > 1$ par hypothèse. Par conséquent, $1-m < 0$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = -\infty$.

2°) On considère la fonction $g_m : x \mapsto \dfrac{f_m(x)}{x^5-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_m(x)$ en détaillant la démarche.

Comme f_m est une fonction polynôme, g_m est une fonction rationnelle car c'est le quotient de deux fonctions polynômes.

On cherche le quotient des monômes de plus haut degré.

En utilisant le résultat du 1°), on peut dire $\lim\limits_{x \to +\infty} g_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(1-m)\cancel{x^5}}{\cancel{x^5}} = 1-m$.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ en détaillant la démarche.

Lorsque x tend vers $+\infty$, le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ tendent tous les deux vers $+\infty$.

On rencontre donc une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On effectue une transformation d'écriture en mettant en facteur $\sqrt{x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = \frac{\cancel{\sqrt{x}} \times \sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}} \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

On vérifie ce résultat graphiquement en traçant la courbe représentative de *f* sur la calculatrice.

V.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ en détaillant la démarche.

En 0^+, on obtient une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

On effectue donc une réécriture en mettant l'expression de $f(x)$ au même dénominateur.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{x-2}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} (x-2) = -2 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty.$$

On peut mettre un signe + en exposant sur le 0.

On vérifie ce résultat graphiquement en traçant la courbe représentative de *f* sur la calculatrice.