TS1

Contrôle du vendredi 21 décembre 2018 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (2 points)

On rappelle que la tangente d'un réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où k est un entier relatif est le réel noté $\tan x$ défini par $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \tan x$ définie sur $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Calculer $f'(x)$ en donnant le résultat sous forme simplifiée.
On ne demande pas de dire pourquoi f est dérivable sur $\mathcal{D}$.

………

………

………

………

………

II. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos x+\sin x-1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que f est une fonction périodique dont on précisera la période.
On formulera la conclusion de la manière suivante : « f est périodique de période … ».

………

………

………

………

2°) Déterminer la primitive F de f qui s'annule en π. On donnera la réponse sans justifier.

……………………………………………………………………….

3°) Vérifier que pour tout réel x, on a $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$.

………

………

………

………

4°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ $\quad$ (E).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (4 points : 2 points + 2 points)

On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = \sin x$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Compléter les phrases suivantes en écrivant une seule réponse à chaque fois :

• La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse π a pour équation ………………………………………………………… .

• La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses ……..……………………………………………… .

IV. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos 2x - \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f\,'(x)$. On donnera la réponse sans justifier.

……………………………………………………………………....

2°) Déterminer une expression factorisée de $f\,'(x)$.

……………………………………………………………………....

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0 \quad (\mathrm{E})$.

Indication : On pourra observer que $f(x) = \cos 2x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ pour tout réel x.

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

4°) Soit α un réel tel que $\sin \alpha = -\dfrac{1}{3}$.

Calculer $f(\alpha)$.

……...

……...

……...

……...

5°) Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$ pour x réel quelconque.

Question bonus : Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$?

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

Corrigé du contrôle du 21-12-2018

I.

On rappelle que la tangente d'un réel x qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où k est un entier relatif est le réel noté $\tan x$ défini par $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \tan x$ définie sur $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Calculer $f'(x)$ en donnant le résultat sous forme simplifiée.
On ne demande pas de dire pourquoi f est dérivable sur $\mathcal{D}$.

$$\forall x\in\mathcal{D}\quad f'(x)=\frac{\cos x\times\cos x-\sin x\times(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}\qquad\qquad 1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

II.

On considère la fonction $f : x\mapsto \cos x+\sin x-1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que f est une fonction périodique dont on justifiera la période.
On formulera la conclusion de la manière suivante : « f est périodique de période … ».

On sait que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.
On va démontrer que la fonction f est également périodique de période 2π.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x+2\pi)=\cos(x+2\pi)+\sin(x+2\pi)-1$$

$$=\cos(x+2\pi)+\sin(x+2\pi)-1$$

$$=f(x)$$

On en déduit que f est périodique de période 2π.

On contrôle ce résultat graphiquement grâce à la calculatrice.

2°) Déterminer la primitive F de f qui s'annule en π. On donnera la réponse sans justifier.

$$\mathrm{F}(x)=\sin x-\cos x-x+\pi-1$$

On notera l'ajout de la constante $\pi-1$ pour que F s'annule en π. La démarche complète est détaillée ci-après.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $\mathrm{F} : x\mapsto \sin x-\cos x-x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

On cherche k tel que $\mathrm{F}(\pi)=0 \quad (1)$.

$$(1)\Leftrightarrow \sin\pi-\cos\pi-\pi+k=0$$

$$\Leftrightarrow 0+1-\pi+k=0$$

$$\Leftrightarrow 1-\pi+k=0$$

$$\Leftrightarrow k=\pi-1$$

3°) Vérifier que pour tout réel x, on a $f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$.

1[ère] méthode :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\sqrt{2}\left(\cos x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos x\times\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\times\sin\frac{\pi}{4}\right)-1$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$$

2[e] méthode :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=\sqrt{2}\left(\cos x\times\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\times\sin\frac{\pi}{4}\right)-1$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos x\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin x\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1$$

$$=\cos x+\sin x-1$$

$$=f(x)$$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$.

Dans cette méthode, il est possible de poser $g(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1$ avant d'effectuer les calculs.

Remarque :

Le tracé de la courbe représentative de f suggère qu'il s'agit d'une sinusoïde.
L'expression de f obtenue dans cette question permet d'affirmer que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est bien une sinusoïde.

$\mathcal{C}$ se déduit de la courbe de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{4}\vec{i}$ suivie de l'affinité d'axe $(\mathrm{O}y)$ et de rapport $\sqrt{2}$ suivie de la translation de vecteur $-\vec{j}$.

4°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ (E).

On utilise l'expression de $f(x)$ établie à la question précédente.

$$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$ (on « enlève » les cos avec la propriété du cours)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=2k'\pi \quad (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Il y a deux « familles » de solutions.

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{2k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$$

On peut retrouver les solutions graphiquement en traçant la courbe représentative de la fonction f sur l'écran de calculatrice.

III.

On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y=\sin x$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Compléter les phrases suivantes en écrivant une seule réponse à chaque fois :

- La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse π a pour équation $y=\pi-x$.
- La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Pour déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse π, on considère la fonction $f : x \mapsto \sin x$.

Une équation de cette tangente s'obtient par la formule $y=f'(\pi)(x-\pi)+f(\pi)$.
On a $f(\pi)=0$ et $f'(\pi)=-1$.

On vérifie le résultat grâce à la calculatrice.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \cos 2x-\sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1°) Calculer $f'(x)$. On donnera la réponse sans justifier.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-2\sin 2x-\cos x$$

2°) Déterminer une expression factorisée de $f'(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-\cos x(4\sin x+1)$$

On utilise la formule de duplication $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$ (E).

Indication : On pourra observer que $f(x)=\cos 2x-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ pour tout réel x.

(E) est une équation trigonométrique.

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \cos 2x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} + x + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$ (on « enlève » les cos avec la propriété du cours)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Il y a deux familles de solutions.

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$$

En positionnant les points images sur le cercle trigonométrique, on s'aperçoit que l'ensemble $\left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ est inclus dans l'ensemble $\left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\}$.

On peut donc écrire $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Autre méthode :

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0$

On pose $X = \sin x$ (changement d'inconnue).

(E) s'écrit $1 - 2X^2 - X = 0 \quad (\mathrm{E}')$.

Les solutions de (E') sont -1 et $\dfrac{1}{2}$.

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \sin x = -1$ ou $\sin x = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k''\pi \quad (k'' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$$S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k''\pi,\ k'' \in \mathbb{Z}\right\}$$

De la même manière qu'avec la première méthode, en utilisant le cercle trigonométrique, on s'aperçoit aisément que l'on peut écrire $S = \left\{\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4°) Soit α un réel tel que $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

Calculer $f(\alpha)$.

$f(\alpha) = \cos 2\alpha - \sin\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha - \sin\alpha$

$= 1 - 2\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$= 1 - \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{10}{9}$

5°) Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$ pour x réel quelconque.

Question bonus : Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$?

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad f(\pi - x) &= \cos\left[2(\pi - x)\right] + \sin(\pi - x)\\ &= \cos(2\pi - 2x) + \sin x\\ &= \cos(-2x) + \sin x\\ &= \cos 2x + \sin x\\ &= f(x)\end{aligned}$$

On peut en déduire que $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.