TS1

Contrôle du vendredi 14 décembre 2018 (50 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………..……………

Note : ……../ 20

Dans tout le contrôle, *P* désigne le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

I. (3 points)

Compléter directement les phrases suivantes :

1°) Les nombres complexes imaginaires purs dont le module vaut 2 sont …………….. .

2°) La distance entre les points A et B de *P* d'affixes respectives $1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $\mathrm{i}-\sqrt{2}$ est égale à …………… .

3°) Le carré du module de $\left(1+\mathrm{i}\right)x+\left(1-\mathrm{i}\right)y$ où x et y sont des réels quelconques est égal à ……………….. .

II. (1 point)

Pour tout nombre complexe z non nul, on pose $z'=\dfrac{\mathrm{i}}{\overline{z}}$.

L'affirmation « Le module de z' est égal à l'inverse du module de z » est-elle vraie ou fausse ?
Justifier.

……

……

……

……

……

……

……

III. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

À tout point M de *P* d'affixe $z \neq 0$ on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$.

1°) Démontrer que $\mathrm{OM}'=\dfrac{2}{\mathrm{OM}}$. Justifier soigneusement toutes les étapes.

……

……

……

……

……

2°) On note Γ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
Démontrer que si M appartient à Γ, alors M' appartient aussi à Γ.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 6 points = 3 points + 3 points)

On note A et B les points de *P* dont les affixes sont les solutions de l'équation $z^2-2z+5=0$ sachant que $\text{Im}\, z_{\text{A}}>0$.

1°) Déterminer z_{A} et z_{B}.

…………………………….…….. (une seule égalité) …………………………….…….. (une seule égalité)

2°) Déterminer en rédigeant avec soin :

- l'ensemble *E* des points M de *P* d'affixe *z* tels que $\left|\,\text{i}z+2-\text{i}\,\right|=5$;
- l'ensemble *F* des points M de *P* d'affixe *z* tels que $\left|\,\overline{z}-1-2\text{i}\,\right|=\left|\,z\,\right|$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

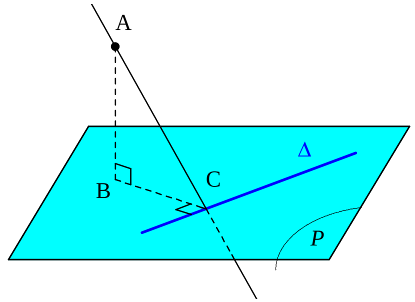
……

……

……

V. (5 points : 1°) 3 points ; 2°) 2 points)

Soit *P* un plan de l'espace et Δ une droite contenue dans *P*.
Soit A un point quelconque de l'espace n'appartenant pas à *P*.
On note B son projeté orthogonal sur *P* et C le projeté orthogonal de B sur Δ. On suppose que $\text{B}\notin\Delta$.



1°) Démontrer que Δ est orthogonale au plan (ABC). En déduire que la droite (AC) est perpendiculaire à Δ.

……

……

……

……

……

……

2°) On note P' le plan contenant A et Δ. Que peut-on dire des plans P' et (ABC) ? Justifier avec soin.

……

……

……

……

……

Corrigé du contrôle du 14-12-2018

Dans tout le contrôle, P désigne le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

I.

Compléter directement les phrases suivantes :

1°) Les nombres complexes imaginaires purs dont le module vaut 2 sont 2i et – 2i.

On sait que le module d'un nombre imaginaire pur iy avec $y \in \mathbb{R}$ est égale à la valeur absolue de y d'où le résultat.
On peut aussi raisonner géométriquement.

2°) La distance entre les points A et B de P d'affixes respectives $1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ et $\mathrm{i}-\sqrt{2}$ est égale à $\sqrt{6}$.

$$\mathrm{AB} = \left| z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \right| = \left| \mathrm{i}-\sqrt{2}-\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right) \right| = \left| -\sqrt{2}-1+\mathrm{i}\left(1-\sqrt{2}\right) \right| = \sqrt{\left(-\sqrt{2}-1\right)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$$

3°) Le carré du module de $\left(1+\mathrm{i}\right)x+\left(1-\mathrm{i}\right)y$ où x et y sont des réels quelconques est égal à $2\left(x^2+y^2\right)$.

On pose $z = \left(1+\mathrm{i}\right)x+\left(1-\mathrm{i}\right)y$.

L'écriture algébrique de z est donnée par $z = x+y+\mathrm{i}\left(x-y\right)$ donc

$$\left| z \right|^2 = \left(x+y\right)^2+\left(x-y\right)^2 = x^2 \cancel{+2xy} + y^2 + x^2 \cancel{-2xy} + y^2 = 2x^2+2y^2.$$

II.

Pour tout nombre complexe z non nul, on pose $z' = \dfrac{\mathrm{i}}{\overline{z}}$.

L'affirmation « Le module de z' est égal à l'inverse du module de z » est-elle vraie ou fausse ?
Justifier.

$$\begin{aligned} \left| z' \right| &= \left| \frac{\mathrm{i}}{\overline{z}} \right| \\ &= \frac{\left| \mathrm{i} \right|}{\left| \overline{z} \right|} \\ &= \frac{1}{\left| z \right|} \end{aligned}$$

L'affirmation est donc vraie.

III.

À tout point M de P d'affixe $z \neq 0$ on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}}$.

1°) Démontrer que $\mathrm{OM}' = \dfrac{2}{\mathrm{OM}}$. Justifier soigneusement toutes les étapes.

On sait que $\mathrm{OM} = \left| z \right|$ et que $\mathrm{OM}' = \left| z' \right|$.

$$\begin{aligned} \mathrm{OM}' &= \left| z' \right| \\ &= \left| \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\overline{z}} \right| \\ &= \frac{\left| 1-\mathrm{i}\sqrt{3} \right|}{\left| \overline{z} \right|} \quad \text{(propriété du module d'un quotient)} \\ &= \frac{2}{\left| z \right|} \quad \left(\text{car } \left| 1-\mathrm{i}\sqrt{3} \right| = 2 \text{ et } \left| \overline{z} \right| = \left| z \right|\right) \\ &= \frac{2}{\mathrm{OM}} \end{aligned}$$

2°) On note Γ le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
Démontrer que si M appartient à Γ, alors M' appartient aussi à Γ.

On attend une démarche déductive (car la question est formulée en « si …, alors … »). Autrement dit, on n'utilise pas d'équivalences.

Si M appartient à Γ, alors $\mathrm{OM} = \sqrt{2}$ donc d'après le résultat de la question précédente $\mathrm{OM}' = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

On en déduit que M' appartient aussi à Γ.

IV.

On note A et B les points de P dont les affixes sont les solutions de l'équation $z^2-2z+5=0$ sachant que $\mathrm{Im}\, z_{\mathrm{A}} > 0$.

1°) Déterminer z_{A} et z_{B}.

$z_{\mathrm{A}} = 1+2\mathrm{i}$ (une seule égalité) $\qquad$ $z_{\mathrm{B}} = 1-2\mathrm{i}$ (une seule égalité)

On utilise le discriminant réduit et on vérifie avec la calculatrice.

2°) Déterminer en rédigeant avec soin :
- l'ensemble E des points M de P d'affixe z tels que $\left| \mathrm{i}z+2-\mathrm{i} \right| = 5$;
- l'ensemble F des points M de P d'affixe z tels que $\left| \overline{z}-1-2\mathrm{i} \right| = \left| z \right|$.

Soit M un point quelconque de *P* d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow \left| \mathrm{i}z + 2 - \mathrm{i} \right| = 5 \\ &\Leftrightarrow \left| \mathrm{i}\left(z - 2\mathrm{i} - 1\right) \right| = 5 \\ &\Leftrightarrow \left| \mathrm{i} \right| \times \left| z - \left(1 + 2\mathrm{i}\right) \right| = 5 \\ &\Leftrightarrow \left| z - \left(1 + 2\mathrm{i}\right) \right| = 5 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{AM} = 5 \end{aligned}$$

Donc *E* est le cercle de centre A et de rayon 5.

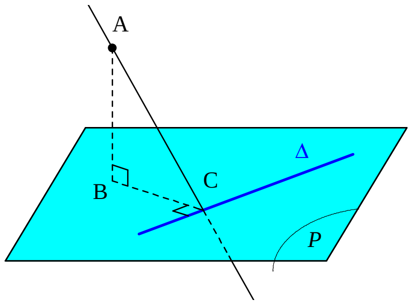
Soit M un point quelconque de *P* d'affixe $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in F &\Leftrightarrow \left| \overline{z} - 1 - 2\mathrm{i} \right| = \left| z \right| \\ &\Leftrightarrow \left| \overline{\overline{z} - 1 - 2\mathrm{i}} \right| = \left| z \right| \\ &\Leftrightarrow \left| z - 1 + 2\mathrm{i} \right| = \left| z \right| \\ &\Leftrightarrow \mathrm{BM} = \mathrm{OM} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{MB} = \mathrm{MO} \end{aligned}$$

Donc *F* est la médiatrice du segment $[\mathrm{OB}]$.

V.

Soit *P* un plan de l'espace et Δ une droite contenue dans *P*.
Soit A un point quelconque de l'espace n'appartenant pas à *P*.
On note B son projeté orthogonal sur *P* et C le projeté orthogonal de B sur Δ. On suppose que $\mathrm{B} \notin \Delta$.



1°) Démontrer que Δ est orthogonale au plan (ABC). En déduire que la droite (AC) est perpendiculaire à Δ.

$(\mathrm{AB}) \perp P$ donc (AB) est orthogonale à toutes les droites contenues dans *P*.
En particulier, (AB) est orthogonale à Δ.

De plus, $(\mathrm{BC}) \perp \Delta$ par définition du projeté orthogonal sur une droite.

La droite Δ est orthogonale à deux droites sécantes (ABC) donc elle est orthogonale au plan (ABC).

Toute droite du plan (ABC) passant par C est donc perpendiculaire à Δ, en particulier la droite (AC).

2°) On note P' le plan contenant A et Δ. Que peut-on dire des plans P' et (ABC) ? Justifier avec soin.

P' contient la droite Δ qui est orthogonale au plan (ABC) donc P' est perpendiculaire à (ABC).