TS1

Contrôle du vendredi 7 décembre 2018 (50 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : …….. / 20**

I. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Dans un aéroport on teste un nouveau dispositif de contrôle des bagages des passagers. Une alarme est censée se déclencher si le bagage scanné contient un objet interdit. On a pu établir que :

- la probabilité qu'un bagage contrôlé contienne un objet interdit est égale à 0,05 ;
- la probabilité que l'alarme se déclenche si un bagage contient un objet interdit est égale à 0,98 ;
- la probabilité que l'alarme se déclenche si un bagage ne contient pas d'objet interdit est égale à 0,08.

Pour tous les résultats, on attend les valeurs exactes sous forme décimale.

1°) Faire au brouillon un arbre de probabilités avec les événements A : « Le bagage contient un objet interdit » et B : « L'alarme se déclenche ».

Quelle est la probabilité qu'un bagage choisi au hasard fasse déclencher l'alarme ? On attend une réponse rédigée.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) On choisit au hasard un des bagages qui a fait se déclencher l'alarme. Quelle est la probabilité que ce bagage contienne un objet interdit ?

………

………

………

………

………

3°) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?

…………………….. (un seul résultat, sans égalité)

II. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Dans un slogan publicitaire, une banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.

1°) On s'intéresse à la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées dans un échantillon de 1000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante.
En utilisant la loi binomiale, écrire ci-dessous, sans justifier, l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.
On donnera la réponse sous la forme d'un intervalle (donc avec des crochets !) en écrivant les bornes sous forme décimale.

……………………… (une seule réponse, sans égalité)

2°) Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ? On répondra par une phrase en utilisant uniquement le résultat du 1°).

………

………

………

………

III. (3 points : 1 point + 2 points)

Dans une loterie, 7 fois sur 10 on ne gagne rien, 2 fois sur 10 on gagne 50 €, 1 fois sur 10 on gagne 100 €.
On doit payer 10 € pour participer à cette loterie.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. X peut donc prendre les valeurs $x_1 = -10$, $x_2 = 40$, $x_3 = 90$.

Compléter la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous où *P* désigne la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire. On écrira les probabilités sous forme décimale.

x_i			
$P(\mathrm{X} = x_i)$			

Calculer l'espérance et la variance de X.
On écrira les formules en situation.

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

IV. (7 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points + 2 points ; 3°) 2 points ; 4°) 1 point bonus)

Une compagnie aérienne exploitant un petit avion de 100 places décide de faire de la surréservation (« surbooking ») en vendant pour chaque vol un nombre *n* de billets où *n* est un entier naturel non nul, éventuellement strictement supérieur à 100. La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est égale à 0,9 et les comportements des acheteurs sont supposés indépendants les uns des autres.

Pour les résultats des probabilités demandées dans les questions 1°) et 2°), on donnera les valeurs arrondies au millième.

Aucune justification n'est demandée.

1°) Si la compagnie accorde 110 réservations sur ce vol, quel est le risque de « surbooking », c'est-à-dire la probabilité que se présentent plus de passagers que les 100 qui pourront embarquer ?

……………….. (une seule réponse, sans égalité)

2°) On suppose dans cette question que la compagnie a vendu 80 billets.

• Quelle est la probabilité qu'au moins 70 places de l'avion soient occupées ?

……………….. (une seule réponse, sans égalité)

• Quel est le plus petit entier naturel *a* tel que la probabilité que le nombre de personnes qui se présentent à l'embarquement soit inférieur ou égal à *a* dépasse 0,6 ? On répondra sans justifier.

……………….. (une seule réponse, sans égalité)

3°) On suppose dans cette question que *n* est quelconque.
Exprimer en fonction de *n* le nombre moyen de personnes qui se présentent à l'embarquement.

……………….. (une seule réponse, sans égalité)

4°) **Question bonus (1 point)**

On suppose encore dans cette question que *n* est inférieur ou égal à 100.
Chaque billet est vendu 200 euros. Un acheteur qui ne se présente pas à l'embarquement est remboursé à 80 %.
On note X la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement.
Exprimer en fonction de *n* le montant moyen en euros du chiffre d'affaire que peut espérer faire la compagnie sur le vol considéré.

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

……………….………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 7-12-2018

I.

Dans un aéroport on teste un nouveau dispositif de contrôle des bagages des passagers. Une alarme est censée se déclencher si le bagage scanné contient un objet interdit. On a pu établir que :

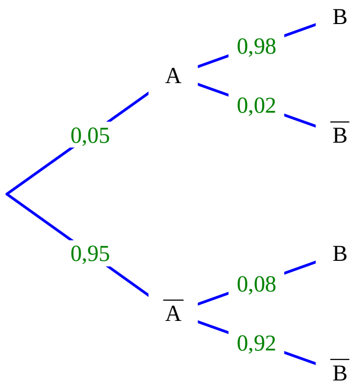
- la probabilité qu'un bagage contrôlé contienne un objet interdit est égale à 0,05 ;
- la probabilité que l'alarme se déclenche si un bagage contient un objet interdit est égale à 0,98 ;
- la probabilité que l'alarme se déclenche si un bagage ne contient pas d'objet interdit est égale à 0,08.

Pour tous les résultats, on attend les valeurs exactes sous forme décimale.

1°) Faire au brouillon un arbre de probabilités avec les événements A : « Le bagage contient un objet interdit » et B : « L'alarme se déclenche ».

Quelle est la probabilité qu'un bagage choisi au hasard fasse déclencher l'alarme ? On attend une réponse rédigée.

On écrit les probabilités sur les branches sous forme décimale.



On sait que A et $\overline{\text{A}}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(\text{B}) = P(\text{A} \cap \text{B}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B})$$

$$= P(\text{A}) \times P(\text{B}/\text{A}) + P(\overline{\text{A}}) \times P(\text{B}/\overline{\text{A}}) \quad (\text{car } P(\text{A}) \neq 0 \text{ et } P(\overline{\text{A}}) \neq 0)$$

$$= 0,05 \times 0,98 + 0,95 \times 0,08$$

$$= 0,125$$

2°) On choisit au hasard un des bagages qui a fait se déclencher l'alarme. Quelle est la probabilité que ce bagage contienne un objet interdit ?

$$P(\text{A}/\text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$$

$$= \frac{0,05 \times 0,98}{0,125}$$

$$= 0,392$$

3°) Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?

0,077 (un seul résultat, sans égalité)

On note E l'événement : « Il y a une erreur de contrôle ».
Il y a une erreur de contrôle dans les deux cas suivants :
- Le bagage contient un objet interdit et l'alarme ne se déclenche pas ;
- le bagage ne contient pas d'objet interdit et l'alarme se déclenche.

On peut écrire $\text{E} = (\text{A} \cap \overline{\text{B}}) \cup (\overline{\text{A}} \cap \text{B})$.

Les événements $\text{A} \cap \overline{\text{B}}$ et $\overline{\text{A}} \cap \text{B}$ sont incompatibles (car A et $\overline{\text{A}}$ sont incompatibles ou B et $\overline{\text{B}}$ sont incompatibles).

$$P(\text{E}) = P(\text{A} \cap \overline{\text{B}}) + P(\overline{\text{A}} \cap \text{B})$$

$$= P(\text{A}/\overline{\text{B}}) \times P(\overline{\text{B}}) + P(\overline{\text{A}}/\text{B}) \times P(\text{B})$$

$$= 0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,08$$

$$= 0,077$$

II.

Dans un slogan publicitaire, une banque affirme que 75 % des demandes de prêts immobiliers sont acceptées.

1°) On s'intéresse à la fréquence de demandes de prêt immobilier acceptées dans un échantillon de 1000 demandes choisies au hasard et de façon indépendante.
En utilisant la loi binomiale, écrire ci-dessous, sans justifier, l'intervalle de fluctuation au seuil approximatif de 95 % de la fréquence de prêts acceptés par la banque.
On donnera la réponse sous la forme d'un intervalle (donc avec des crochets !) en écrivant les bornes sous forme décimale.

$[0,723\,;\,0,777]$ (une seule réponse, sans égalité)

On constate que cet intervalle contient 0,75 mais que 0,75 n'est pas le centre de cet intervalle.

2°) Dans une agence de cette banque, on a observé que, sur les 1000 dernières demandes effectuées, 600 demandes ont été acceptées. Que peut-on penser du slogan publicitaire de la banque ? On répondra par une phrase en utilisant uniquement le résultat du 1°).

$0,6 \in [0,723\,;0,777]$ donc on rejette le slogan publicitaire au seuil de 95 %.

III.

Dans une loterie, 7 fois sur 10 on ne gagne rien, 2 fois sur 10 on gagne 50 €, 1 fois sur 10 on gagne 100 €.
On doit payer 10 € pour participer à cette loterie.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur en euros. X peut donc prendre les valeurs $x_1 = -10$, $x_2 = 40$, $x_3 = 90$.

Compléter la loi de probabilité de X donnée dans le tableau ci-dessous où *P* désigne la loi de probabilité qui modélise l'expérience aléatoire. On écrira les probabilités sous forme décimale.

x_i	– 10	40	90
$P(X = x_i)$	0,7	0,2	0,1

Calculer l'espérance et la variance de X.
On écrira les formules en situation.

$\mathrm{E}(X) = -10 \times 0,7 + 40 \times 0,2 + 90 \times 0,1 = 10$

On peut calculer la variance avec la formule de Kœnig-Huygens.

$\mathrm{V}(X) = (-10)^2 \times 0,7 + 40^2 \times 0,2 + 90^2 \times 0,1 - 10^2 = 1100$

On peut aussi calculer la variance avec la formule de définition.

IV.

Une compagnie aérienne exploitant un petit avion de 100 places décide de faire de la surréservation (« surbooking ») en vendant pour chaque vol un nombre *n* de billets où *n* est un entier naturel non nul, éventuellement strictement supérieur à 100. La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est égale à 0,9 et les comportements des acheteurs sont supposés indépendants les uns des autres.

Pour les résultats des probabilités demandées dans les questions 1°) et 2°), on donnera les valeurs arrondies au millième.

Aucune justification n'est demandée.

1°) Si la compagnie accorde 110 réservations sur ce vol, quel est le risque de « surbooking », c'est-à-dire la probabilité que se présentent plus de passagers que les 100 qui pourront embarquer ?

0,329 (une seule réponse, sans égalité)

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.
X suit la loi binomiale de paramètres 110 et 0,9.
On cherche $P(X > 100)$.
Pour la calculatrice, on écrit $P(X > 100) = 1 - P(X \leqslant 100)$.
On fait « $1 - \text{binomFRép}(110, 0.9, 100)$ ».
On obtient l'affichage 0,3289856061.

Le résultat est en fait un nombre décimal.

Autre méthode :

On écrit $P(X > 100) = \sum_{k=101}^{k=110} P(X = k)$. On tape donc $\sum_{K=101}^{110} \text{binomFdp}(110, 0.9, K)$.

2°) On suppose dans cette question que la compagnie a vendu 80 billets.

● Quelle est la probabilité qu'au moins 70 places de l'avion soient occupées ?

0,827 (une seule réponse, sans égalité)

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers qui se présentent à l'embarquement.
X suit la loi binomiale de paramètres 80 et 0,9.
On cherche $P(X \geqslant 70)$.
Pour la calculatrice, on écrit $P(X \geqslant 70) = 1 - P(X \leqslant 69)$.
On fait « $1 - \text{binomFRép}(80, 0.9, 69)$ ».
On obtient l'affichage 0,8266156122.

● Quel est le plus petit entier naturel *a* tel que la probabilité que le nombre de personnes qui se présentent à l'embarquement soit inférieur ou égal à *a* dépasse 0,6 ? On répondra sans justifier.

73 (une seule réponse, sans égalité)

On utilise la calculatrice en rentrant la fonction $\text{Y1} = \text{binomFRép}(80, 0.9, X)$.
Il s'agit d'une lecture de table de fonction de répartition d'une loi binomiale.

$P(X \geqslant 72) = 0,554443594477...$

$P(X \geqslant 73) = 0,6995483491992...$

On peut aussi utiliser la commande « invBinom ».

3°) On suppose dans cette question que *n* est quelconque.
Exprimer en fonction de *n* le nombre moyen de personnes qui se présentent à l'embarquement.

0,9*n* (une seule réponse, sans égalité)

On note X la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement.

X suit la loi binomiale de paramètres *n* (nombre d'épreuves) et 0,9 (probabilité d'un succès, le succès étant l'événement : « La personne se présente à l'embarquement »).

L'espérance mathématique de X est égale à 0,9n. Il s'agit du nombre moyen de personnes qui se présentent à l'embarquement.

4°) **Question bonus**

On suppose encore dans cette question que n est inférieur ou égal à 100.
Chaque billet est vendu 200 euros. Un acheteur qui ne se présente pas à l'embarquement est remboursé à 80 %.
Exprimer en fonction de n le montant moyen en euros du chiffre d'affaire que peut espérer faire la compagnie sur le vol considéré.

On note G la variable aléatoire désignant le montant en euros du chiffre d'affaire de la compagnie sur le vol considéré.

On va exprimer G en fonction de n et de X.

Comme $n \leqslant 100$, il n'y a pas de client en surnombre. Le chiffre d'affaires est la différence entre les sommes perçues et les sommes déboursées à savoir en euros :
• les sommes perçues au moment de la réservation : $n \times 200 = 200n$;
• les sommes servies aux démissionnaires : $\left(n - \text{X}\right) \times 0,8 \times 200 = 160\left(n - \text{X}\right)$.
Donc $\text{G} = 200n - 160\left(n - \text{X}\right) = 40n + 160\text{X}$.

On calcule ensuite l'espérance de G en fonction de n. Pour cela, on applique la formule de linéarité de l'espérance.

$$\text{E}\left(\text{G}\right) = 40n + 160\text{E}\left(\text{X}\right)$$

$$= 40n + 160 \times 0,9n$$

$$= 184n$$