TS1

Contrôle du samedi 24 novembre 2018 (2 heures)

Prénom et nom : ……..……

Note : …….. / 20

I. (2 points : 1 point + 1 point)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $e^{E(x)} = 1 \quad (1)$ et $E\left(e^{x}\right) = 2 \quad (2)$.

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction exponentielle dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit a un réel fixé. On note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse a.

1°) Déterminer une équation de T_a.

…… (une seule réponse sans justifier)

2°) Exprimer en fonction de a l'abscisse du point B d'intersection de T_a avec l'axe des abscisses.

…… (une seule réponse sans justifier)

III. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 3 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - e^{-x}}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

……..……

……..……

……..……

……..……

2°) • Calculer $f(\ln 2)$ et $f(\ln 3)$. On attend la valeur exacte.

• Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Calculer $f(\ln k)$.

• Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \prod_{k=2}^{k=n} f(\ln k)$.

Déterminer une expression simplifiée de u_n en fonction de n.

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

……..……

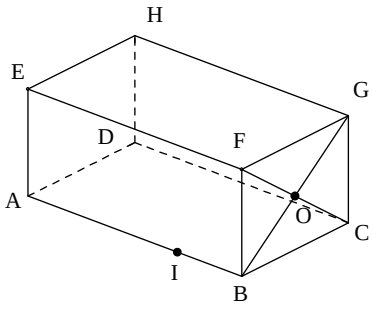
……..……

……..……

……..……

IV. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère un pavé droit ABCDEFGH (voir figure). Soit I un point quelconque sur la droite (AB). On note O le centre de la face BCGF.



1°) On suppose dans cette question que I est distinct de B.

Les droites (IH) et (BF) sont-elles coplanaires ? Répondre par oui ou non sans justifier.

……

2°) Étudier la position relative des droites (OI) et (AG).
On répondra avec le plus de précision possible en discutant suivant la position du point I sur la droite (AB).

……

……

……

……

……

……

3°) Tracer sur la figure la droite d'intersection Δ des plans (CGI) et (BDF).
Citer le théorème utilisé.

……

……

V. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $3u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1°) À l'aide de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, démontrer que pour tout entier naturel n on a

$u_n = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Seule une réponse parfaitement justifiée sera prise en compte.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Prénom et nom : ……

VI. (4 points : 1°) 1 point ; 2) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1°) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n \geqslant \sqrt{n}$.

……

……

……

……

2°) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ en détaillant brièvement le raisonnement.

……

……

……

3°) Déterminer le sens de variation de (S_n).

……

……

……

……

……

4°) On considère l'algorithme ci-contre où les variables s et a sont des réels et la variable k est un entier naturel.

• Faire tourner au brouillon l'algorithme à la main pour $a = 5$ en entrée. On pourra faire un tableau d'étapes.

Recopier et compléter la phrase : « Pour $a = 5$ en entrée, on obtient la valeur …. en sortie. ».

……

……

• Dans le cas général, interpréter par une phrase la valeur de k affichée en sortie.

……

……

Initialisation :
Saisir a

Initialisation :
s prend la valeur 1
k prend la valeur 1

Traitement :
Tantque $s < a$ **Faire**
  k prend la valeur $k+1$
  s prend la valeur $s + \frac{1}{\sqrt{k}}$
FinTantque

Sortie :
Afficher k

VII. (1 point)

Soit x un réel positif ou nul.
On note $f(x)$ la somme de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à x.
Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
.
On attend une expression explicite et non une expression utilisant le symbole Σ.
On ne demande pas de justifier.

…… (une seule égalité)

Bonus (1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Exprimer $\underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{n \text{ fois}}(x)$ en fonction de x et de n.

Corrigé du contrôle du 24-11-2018

I.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $e^{E(x)} = 1 \quad (1)$ et $E(e^x) = 2 \quad (2)$.

$(1) \Leftrightarrow E(x) = 0$

$\Leftrightarrow 0 \leqslant x < 1$ (inégalité large à gauche, stricte à droite)

Soit S_1 l'ensemble de solutions de (1).

$S_1 = [0\,;1[$

$(2) \Leftrightarrow 2 \leqslant e^x < 3$

$\Leftrightarrow \ln 2 \leqslant x < \ln 3$

Soit S_2 l'ensemble de solutions de (2).

$S_2 = [\ln 2\,; \ln 3[$

II.

On note $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction exponentielle dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit a un réel fixé. On note T_a la tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse a.

1°) Déterminer une équation de T_a.

$$y = e^a(x-a) + e^a \text{ (une seule réponse sans justifier)}$$

On utilise la formule donnant l'équation d'une tangente $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $f : x \mapsto e^x$.
On sait que $f(a) = e^a$ et que $f'(a) = e^a$.
Cette équation peut éventuellement être présentée sous forme factorisée : $y = e^a(x-a+1)$.

2°) Exprimer en fonction de a l'abscisse du point B d'intersection de T_a avec l'axe des abscisses.

$$a-1 \text{ (une seule réponse sans justifier)}$$

L'abscisse de B vérifie $e^a(x_B - a) + e^a = 0$.
Ion met e^a en facteur. On obtient $e^a(x_B - a + 1) = 0$.
Il s'agit d'une égalité « produit égal à 0 ».
Comme $e^a \neq 0$, on en déduit que $x_B - a + 1 = 0$ d'où $x_B = a - 1$.

III.

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - e^{-x}}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow 1 - e^{-x} \geqslant 0$

$\Leftrightarrow e^{-x} \leqslant 1$

$\Leftrightarrow -x \leqslant 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant 0$ (on multiplie les deux membres de l'inégalité précédente par – 1)

L'ensemble de définition de f est $[0\,; +\infty[$.

On peut aussi dire que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

En traçant la courbe représentative de f sur l'écran de la calculatrice, on vérifie le résultat graphiquement.

2°) • Calculer $f(\ln 2)$ et $f(\ln 3)$. On attend la valeur exacte.

$$f(\ln 2) = \sqrt{1 - e^{-\ln 2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{e^{\ln 2}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (valeur exacte)}$$

$$f(\ln 3) = \sqrt{1 - e^{-\ln 3}} = \sqrt{1 - \frac{1}{e^{\ln 3}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ (valeur exacte)}$$

• Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Calculer $f(\ln k)$.

$$f(\ln k) = \sqrt{1 - e^{-\ln k}} = \sqrt{1 - \frac{1}{e^{\ln k}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{k}} = \sqrt{\frac{k-1}{k}}$$

• Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \prod_{k=2}^{k=n} f(\ln k)$.

Déterminer une expression simplifiée de u_n en fonction de n.

$$u_n = \prod_{k=2}^{k=n} f(\ln k)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{3}{4}} \times \ldots \times \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

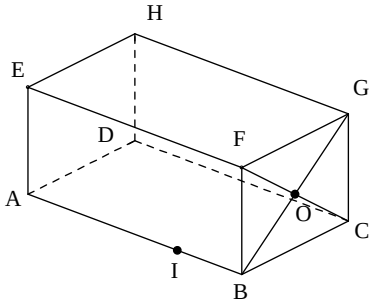
$$= \sqrt{\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{4} \times \ldots \times \frac{\cancel{n-1}}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}$$

IV.

On considère un pavé droit ABCDEFGH (voir figure). Soit I un point quelconque sur la droite (AB). On note O le centre de la face BCGF.



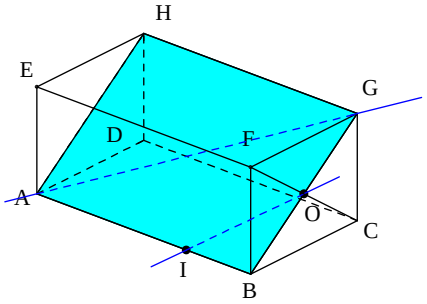
1°) On suppose dans cette question que I est distinct de B.

Les droites (IH) et (BF) sont-elles coplanaires ? Répondre par oui ou non sans justifier.

non

Les points B, F, H, I ne sont pas coplanaires.

2°) Étudier la position relative des droites (OI) et (AG).
On répondra avec le plus de précision possible en discutant suivant la position du point I sur la droite (AB).



Les points A et G appartiennent au plan (ABG) donc (AG) est incluse dans ce plan.

$I \in (AB)$ et $O \in (BG)$ donc I et O appartiennent au plan (ABG) donc (OI) est aussi une droite incluse dans (ABG).

On en déduit que (AG) et (OI) sont coplanaires.

On sait par hypothèse que O est le centre de la face BCGF donc O est le milieu des segments $[BG]$ et $[CF]$.
D'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle ABG, $(AG) // (OI) \Leftrightarrow$ I est le milieu de $[AB]$.

• Si I est le milieu de $[AB]$, alors (AG) et (OI) sont strictement parallèles.

• Si I n'est pas confondu par avec le milieu de $[AB]$, (AG) et (OI) sont sécantes en un point M.

Complément : cas particuliers (non demandés lors du contrôle)

• Si I et A sont confondus, alors (AG) et (OI) sont sécantes en A.

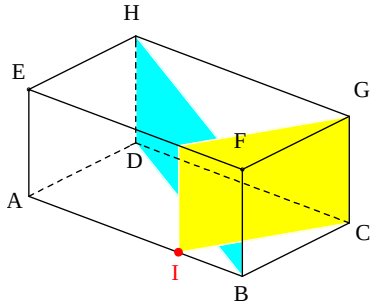
• Si I et B sont confondus, alors (AG) et (OI) sont sécantes en G.

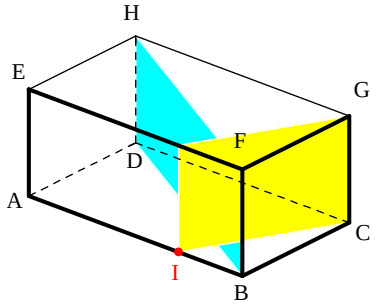
3°) Tracer sur la figure la droite d'intersection Δ des plans (CGI) et (BDF).
Citer le théorème utilisé.

Il s'agit du « théorème du toit ».
Si deux droites sécantes incluses dans deux plans sécants sont parallèles, alors elles sont parallèles à la droite d'intersection.

On commence par visualiser les plans (CGI) et (BDF) sur la figure.

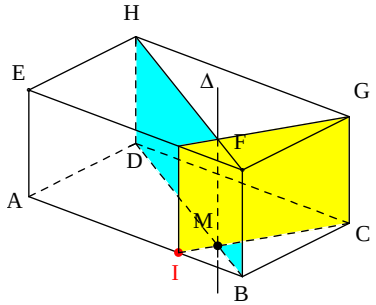
Pour mieux voir, on peut éventuellement tracer en gras les arêtes de devant en gras.





On représente les plans en couleur. Il s'agit de « plans de travers ».

Soit M le point d'intersection des droites (CI) et (BD).



Il est important d'utiliser des pointillés pour la partie située à l'intérieur du pavé droit.
Pour cela, il faut marquer le point lequel cette droite perce le plan de la face supérieure.

V.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = -1$ et la relation de récurrence $3u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1°) À l'aide de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, démontrer que pour tout entier naturel n on a $u_n = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\
&= \frac{2u_{n+1}+1}{3} - 1 \\
&= \frac{2u_n - 2}{3} \\
&= \frac{2(u_n - 1)}{3} \\
&= \frac{2v_n}{3} \\
&= \frac{2}{3}v_n
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = -2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. Seule une réponse parfaitement justifiée sera prise en compte.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$

Par limite d'un produit, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 0$.

Par limite d'une somme, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

VI.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

On ne cherche pas une formule explicite de S_n en fonction de n.

1°) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n \geqslant \sqrt{n}$.

La somme S_n comporte n termes dont le plus petit est $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(Le plus grand terme est 1).

On applique le principe grossier de majoration-minoration d'une somme.

On obtient : $\underbrace{n}_{\text{nombre de termes}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant S_n \left(\leqslant n \times 1 \right)$ soit $\frac{n}{\sqrt{n}} \leqslant S_n \left(\leqslant n \right)$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \geqslant \sqrt{n}$ (car $\frac{n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} \times \cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}$).

2°) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ en détaillant brièvement le raisonnement.

On reprend le résultat de la question précédente.

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc d'après l'extension du théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

3°) Déterminer le sens de variation de $\left(S_n \right)$.

Il y a deux méthodes.

1ère méthode : méthode directe (mieux car plus courte)

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{n+1} = S_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Comme $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{n+1} > S_n$.

2e méthode : par différence (possible mais un peu plus longue)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \left(\text{ou } S_{n+1} - S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cancel{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}} - \cancel{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$ ce qui est équivalent à $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{n+1} - S_n > 0$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{n+1} > S_n$.

On en déduit que $\left(S_n \right)$ est strictement croissante.

4°) On considère l'algorithme ci-contre où les variables s et a sont des réels et la variable k est un entier naturel.

• Faire tourner au brouillon l'algorithme à la main pour $a = 5$ en entrée. On pourra faire un tableau d'étapes.
Recopier et compléter la phrase : « Pour $a = 5$ en entrée, on obtient la valeur …. en sortie. ».

Pour $a = 5$ en entrée, on obtient la valeur 10 en sortie.

On peut vérifier le résultat en réalisant le programme correspondant à l'algorithme sur la calculatrice.

• Dans le cas général, interpréter par une phrase la valeur de k affichée en sortie.

La valeur de k affichée en sortie est le plus petit entier naturel n tel que $S_n \geqslant a$.

Initialisation :
Saisir a

Initialisation :
s prend la valeur 1
k prend la valeur 1

Traitement :
Tantque $s < a$ **Faire**
  k prend la valeur $k+1$
  s prend la valeur $s + \frac{1}{\sqrt{k}}$
FinTantque

Sortie :
Afficher k

VII.

Soit x un réel positif ou nul.
On note $f(x)$ la somme de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à x.
Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
.
On attend une expression explicite et non une expression utilisant le symbole Σ.
On ne demande pas de justifier.

$$f(x)=\frac{\mathrm{E}(x)\left(\mathrm{E}(x)+1\right)}{2} \text{ (une seule égalité)}$$

Par définition de la partie entière, le plus grand entier naturel inférieur ou égal à x est $\mathrm{E}(x)$.

La somme de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à x est égale à la somme des tous les entiers naturels jusqu'à $\mathrm{E}(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R}_+ \quad f(x)=\sum_{\substack{k \text{ entier naturel}\\ k\leqslant x}} k$$

$$=\sum_{k=0}^{k=\mathrm{E}(x)} k$$

$$=\frac{\mathrm{E}(x)\left(\mathrm{E}(x)+1\right)}{2} \quad \text{(formule de la somme d'entiers consécutifs)}$$

Bonus

On considère la fonction $f : x \longmapsto x^2$.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Exprimer $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n \text{ fois}}(x)$ en fonction de x et de n.

$$\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n \text{ fois}}(x)=x^{(2^n)}$$

Le rond ($\circ$) signifie la composée.

On commence par calculer $(f\circ f)(x)$ et $(f\circ f\circ f)(x)$.

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad (f\circ f)(x)=\left(x^2\right)^2$$

$$=x^4$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad (f\circ f\circ f)(x)=f\left[(f\circ f)(x)\right]$$

$$=\left(x^4\right)^2$$

$$=x^8$$

On peut conjecturer que $\forall x\in\mathbb{R} \quad \underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n \text{ fois}}(x)=x^{(2^n)}$.

Ce résultat se démontre aisément par récurrence.