1ère S2

Contrôle du mardi 13 novembre 2018 (3 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………..…………

I (4)	II (3)	III (3)	IV (3)	V (3)	VI (5)	Total/20

I. (4 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2+2x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie 1 (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Faire le tableau de signes de $f(x)$.

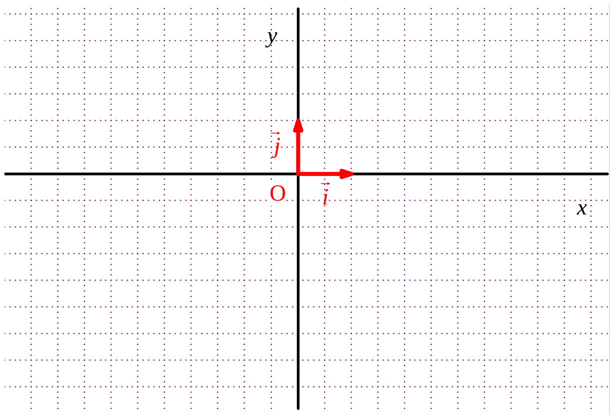
2°) Faire le tableau de variations de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{-x^2+2x+1}$ sur son ensemble de définition.

Partie 2 (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe $\mathcal{C}$, la parabole Γ d'équation $y=-x^2$ ainsi que la droite D d'équation cartésienne $4x-2y+1=0$.

1°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D.

2°) Étudier algébriquement la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Γ.



On rédigera la conclusion de la manière suivante :

> • $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de Γ sur … ;
>
> • $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de Γ sur … ;
>
> • $\mathcal{C}$ et Γ sont sécantes au point d'abscisse ….

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto 2-|x-1|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x)>0$.

2°) Soit a et b deux réels. On considère la fonction $g : x \mapsto a+b|x-1|$ définie sur $\mathbb{R}$.

• Déterminer a et b sachant que $g(1)=2$ et $g\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$.

Dans les questions suivantes, on suppose que a et b ont les valeurs trouvées précédemment.

• Exprimer $g(x)$ sans barres de valeurs absolues suivant les valeurs de x.

• Compléter la fonction **image** définie dans l'encadré ci-dessous dont l'argument est un réel x afin que le résultat qu'elle renvoie soit égal à l'image de x par g.

```
Fonction image(x)
    Si …………… Alors
        y ← ………..
    Sinon  y ← ………..
    FinSi
    Renvoyer y
FinFonction
```

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Pour tout réel m on considère le polynôme $P_m(x)=x^2-2x+m$.

Les trois questions sont indépendantes.

1°) Calculer le discriminant réduit de $P_m(x)$ en fonction de m.

Pour quelles valeurs de m le polynôme $P_m(x)$ n'admet-il aucune racine dans $\mathbb{R}$?

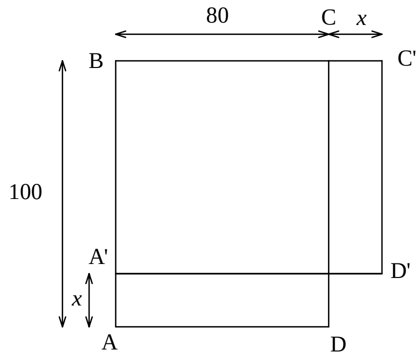
Que peut-on dire du signe de $P_m(x)$ dans ce cas ? Répondre par une phrase quantifiée en justifiant avec précision.

2°) Dans cette question, on prend $m=1$. Déterminer une expression simplifiée de $\sqrt{P_1(x)}$ pour x quelconque.

3°) Développer le produit $P_1(x)P_{-1}(x)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4-4x^3+4x^2-1=0$ $\quad$ (E).

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

On considère un champ rectangulaire mesurant initialement 100 m sur 80 m.
Soit x un réel quelconque compris entre 0 et 80. On diminue la longueur du champ de x mètres et on augmente la largeur de x mètres comme l'indique la figure ci-dessous.
On obtient ainsi un nouveau champ dont l'aire en m^2 est notée $\mathcal{A}(x)$.



1°) Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x. On donnera le résultat sous forme développée.

2°) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du nouveau champ est strictement supérieure à l'aire initiale du champ.

3°) Déterminer pour quelle valeur de x l'aire du nouveau champ est maximale.

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de $[\text{AC}]$, J le point défini par $5\overrightarrow{\text{AJ}} = 4\overrightarrow{\text{AB}}$ et K le point tel que $3\overrightarrow{\text{AK}} + 2\overrightarrow{\text{CK}} = 8\overrightarrow{\text{BC}}$.

Pour résoudre les questions de cet exercice, il est demandé de ne pas rapporter le plan à un repère.
Dans l'espace vide ci-contre, faire une figure en plaçant uniquement les points I et J pour commencer.
On adoptera la disposition classique des points pour un triangle quelconque : (AB) horizontale, A à gauche de B, C au-dessus. On rappelle que la figure doit être faite dans le « cas général », et ne comporter aucune particularité d'angle ou de longueur.

1°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.

2°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{CK}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$. Placer le point K sur la figure.

3°) Démontrer qu'il existe un réel k que l'on précisera tel que $\overrightarrow{\text{CK}} = k\overrightarrow{\text{IJ}}$.
Que peut-on en déduire pour les droites (IJ) et (CK) ?

VI. (5 points)

Soit ABCD un parallélogramme. On note E le symétrique de B par rapport à C.
Dans tout l'exercice, on rapporte le plan au repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right)$. On utilisera ce repère pour résoudre les différentes questions.

Faire une figure au brouillon.

Question préliminaire : Écrire sur une même ligne les coordonnées des points A, B, C, D, E sans justifier.

1ère partie (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BD).

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (DE).

2e partie (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Soit I un point quelconque de la droite (AB). La parallèle à (AD) passant par I coupe la droite (DE) en un point J.
On note K le milieu de $[\text{IJ}]$.
On pose $\overrightarrow{\text{AI}} = a\overrightarrow{\text{AB}}$ où a est un réel quelconque.

Compléter la figure en prenant $a = \dfrac{3}{4}$. Cette valeur de a n'est valable que pour la figure.

Donner sans justifier les coordonnées de I.

1°) Déterminer les coordonnées de J puis de K en fonction de a.

2°) Déterminer a pour que K appartienne à la droite (BD).
On attend un raisonnement par équivalences (sous forme d'une « chaîne » d'équivalences avec des « si et seulement si »).

1ère S2 **Prénom et nom :** ……………………………………………..…………..…………

I. (4 points)

Partie 1 (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°)

2°)

Partie 2 (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

1°) ……………………………….. (résultats séparés par un point-virgule)

2°)

II. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

1°) …………………………. (écrire l'ensemble de solutions sans égalité)

2°) ….……..

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

……...

III. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

……...

……...

……...

……...

……...

……...

IV. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) ….……..

2°) ………..

……...

……...

……...

……...

3°) ………..

……...

……...

……...

……...

……...

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

VI. (5 points)

Question préliminaire :

……………………………………………………………………………………………

1ère partie (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2e partie (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 13-11-2018

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto -x^2+2x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie 1

1°) Faire le tableau de signes de $f(x)$.

Les racines de $f(x)$ sont $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$ (déterminées en utilisant le discriminant réduit).

$f(x)$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=-1$, $b=2$, $c=1$ donc f est une fonction polynôme du second degré.

D'après la règle du signe d'un polynôme du second degré, on peut dresser le tableau de signes suivant.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Il ne faut pas oublier les 0 sous les valeurs charnières.

2°) Faire le tableau de variations de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{-x^2+2x+1}$ sur son ensemble de définition.

$g(x)$ existe si et seulement si $-x^2+2x+1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 1-\sqrt{2}$ ou $x \neq 1+\sqrt{2}$

L'ensemble de définition de g est donc $\mathbb{R} \setminus \left\{1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\right\}$.

D'après la question précédente, g_m est définie sur $\mathbb{R}$.

On observe que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\right\}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$. Autrement dit g est l'inverse de f.

On commence par dresser le tableau de variations de f.

f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;1\right]$ et strictement décroissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de f		↗	2	↘	

On a intérêt à faire un tableau plus complet.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Variations de f		↗	0	↗	2	↘	0	↘	

Comme f est de signe constant sur les intervalles où elle ne s'annule pas, on en déduit que les variations de g sont contraires de celles de f sur ces intervalles.

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
Variations de g		↗	||	↗	$\frac{1}{2}$	↘	||	↘	

$g(1)=\dfrac{1}{f(1)}=\dfrac{1}{2}$

Partie 2

Sur le graphique ci-dessous, tracer la courbe $\mathcal{C}$, la parabole Γ d'équation $y=-x^2$ ainsi que la droite D d'équation cartésienne $4x-2y+1=0$.

1°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D.

$\mathcal{C}$ a pour équation $y=-x^2+2x+1$ et D a pour équation réduite $y=2x+\dfrac{1}{2}$.

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D sont les solutions de l'équation $-x^2+2x+1=2x+\dfrac{1}{2}$ $\quad(1)$.

(1) est successivement équivalente à :

$-x^2=-\dfrac{1}{2}$

$x^2=\dfrac{1}{2}$

$x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D sont les solutions de l'équation $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2°) Étudier algébriquement la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Γ.

On rédigera la conclusion de la manière suivante :

• $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de Γ sur … .
• $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de Γ sur … .
• $\mathcal{C}$ et Γ sont sécantes au point d'abscisse ….

Il s'agit d'étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Γ.

On pose $h(x) = -x^2 + 2x + 1 - \left(-x^2\right)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \cancel{-x^2} + 2x + 1 \cancel{+x^2}$

$= 2x + 1$

$\forall x \in \left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[\quad h(x) > 0$

$\forall x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\quad h(x) < 0$

$h(x) = 0$ pour $x = -\frac{1}{2}$

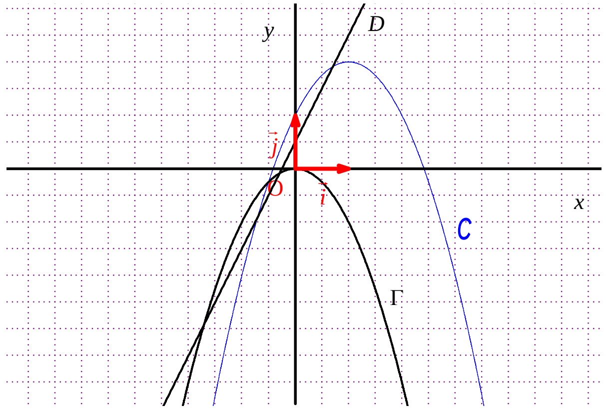
On en conclut que :

• $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de Γ sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$;

• $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de Γ sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[$;

• $\mathcal{C}$ et Γ sont sécantes au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

On vérifie que ces résultats sont en accord avec ceux du graphique.



II.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto 2 - |x - 1|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Résoudre par le calcul l'inéquation $f(x) > 0$.

$$\left]-1\,;3\right[$$

L'inéquation $f(x) > 0$ s'écrit $2 - |x-1| > 0$.

Elle est successivement équivalente à :

$|x - 1| < 2$

$-2 < x - 1 < 2$

$-1 < x < 3$ (on ajoute 1 à chaque membre de l'inégalité précédente)

On vérifie la réponse en traçant la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.

2°) Soit a et b deux réels. On considère la fonction $g : x \mapsto a + b|x - 1|$ définie sur $\mathbb{R}$.

• Déterminer a et b sachant que $g(1) = 2$ et $g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

$g(1) = 2$ donc $a + b|1 - 1| = 2$ soit $a + b \times 0 = 2$ d'où $a = 2$.

$g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ donc $a + b\left|-\frac{1}{3} - 1\right| = \frac{2}{3}$.

Comme $a = 2$, on a $2 + b\left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}$ soit $b \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} - 2$ ce qui donne $b \times \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$.

On obtient finalement $b = -1$.

Ainsi l'expression de la fonction g est $g(x) = 2 - |x - 1|$.

On constate que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f(x)$.
Les fonctions *f* et *g* sont donc égales.

Dans les questions suivantes, on suppose que *a* et *b* ont les valeurs trouvées précédemment.

• Exprimer $g(x)$ sans barres de valeurs absolues suivant les valeurs de *x*.

☐ $\forall x \in [1\,;+\infty[\quad x \geqslant 1$ donc $x-1 \geqslant 0$, d'où $|x-1| = x-1$.

Donc $\forall x \in [1\,;+\infty[\quad g(x) = 2-(x-1) = 3-x$.

☐ $\forall x \in]-\infty\,;1] \quad x \leqslant 1$ donc $x-1 \leqslant 0$, d'où $|x-1| = -x+1$.

Donc $\forall x \in]-\infty\,;1] \quad g(x) = 2-(-x+1) = x+1$.

• Compléter la fonction **image** définie dans l'encadré ci-dessous dont l'argument est un réel *x* afin que le résultat qu'elle renvoie soit égal à l'image de *x* par *g*.

```
Fonction image(x)
    Si x ⩾ 1 Alors
            y ← 3 − x
        Sinon   y ← x + 1
    FinSi
    Renvoyer y
FinFonction
```

III.

Pour tout réel *m* on considère le polynôme $P_m(x) = x^2 - 2x + m$.
Les trois questions sont indépendantes.

1°) Calculer le discriminant réduit de $P_m(x)$ en fonction de *m*.
Pour quelles valeurs de *m* le polynôme $P_m(x)$ n'admet-il aucune racine dans $\mathbb{R}$?
Que peut-on dire du signe de $P_m(x)$ dans ce cas ? Répondre par une phrase quantifiée en justifiant avec précision.

$\Delta' = 1^2 - m = 1 - m$

$P_m(x)$ n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$ lorsque $1-m<0$ c'est-à-dire lorsque $m>1$.

Lorsque $m>1$, $\Delta'<0$ et le coefficient de x^2 est strictement positif donc le polynôme $P_m(x)$ est strictement positif pour tout réel *x*.
On peut écrire $\forall x \in \mathbb{R} \quad P_m(x) > 0$.

2°) Dans cette question, on prend $m=1$. Déterminer une expression simplifiée de $\sqrt{P_1(x)}$ pour *x* quelconque.

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P_1(x) = x^2 - 2x + 1$

$= (x-1)^2$

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{P_1(x)} = \sqrt{(x-1)^2}$

$=$ valeur absolue de $x-1$

$= |x-1|$

3°) Développer le produit $P_1(x)P_{-1}(x)$ puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = 0 \quad (\mathrm{E})$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_1(x)P_{-1}(x) = (x^2-2x+1)(x^2+2x-1)$

$= x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 - 2x - 1$

$= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$

(E) est successivement équivalente à :

$P_1(x)P_{-1}(x) = 0$

$P_1(x) = 0$ ou $P_{-1}(x) = 0$

Le polynôme $P_1(x)$ admet 1 pour racine double (car $P_1(x) = (x-1)^2$).

Le polynôme $P_{-1}(x) = x^2 + 2x - 1$ admet $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$ pour racines (on utilise le discriminant réduit).

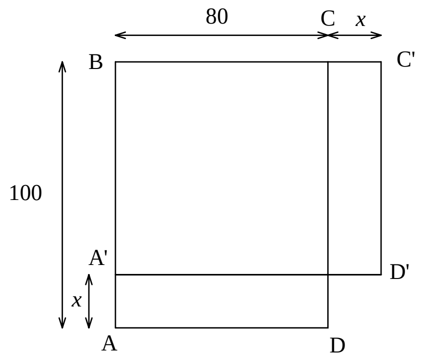
Soit *S* l'ensemble des solutions de (E).

$S = \{1\,;1-\sqrt{2}\,;1+\sqrt{2}\}$

N. B. : La commande de résolution des équations polynomiales permet d'obtenir la racine 1 mais donne des valeurs approchées pour les deux autres racines réelles.

IV.

On considère un champ rectangulaire mesurant initialement 100 m sur 80 m.
Soit *x* un réel quelconque compris entre 0 et 80. On diminue la longueur du champ de *x* mètres et on augmente la largeur de *x* mètres comme l'indique la figure ci-dessous.
On obtient ainsi un nouveau champ dont l'aire en m^2 est notée $\mathcal{A}(x)$.



1°) Exprimer $\mathcal{A}(x)$ en fonction de x. On donnera le résultat sous forme développée.

On utilise tout de suite la notation $\mathcal{A}(x)$ (qu'on utilisera tout au long de l'exercice).

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= \text{aire de A'BC'D'}\\ &= (100-x)(80+x)\\ &= 100\times 80 + 100x - 80x - x^2\\ &= -x^2+20x+8000\end{aligned}$$

2°) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'aire du nouveau champ est strictement supérieure à l'aire initiale du champ.

L'aire initiale du champ est $8000\ \text{m}^2$.

On résout donc l'inéquation $\mathcal{A}(x) > 8000$.

Cette inéquation est successivement équivalente à :

$$-x^2+20x+8000>8000$$

$$-x^2+20x>0$$

1ère méthode :

On s'intéresse au trinôme du second degré $-x^2+20x$.
On peut factoriser $-x^2+20x = x(20-x)$ donc les racines sont 0 et 20. Le signe du coefficient de x^2 est strictement négatif (il est égal à – 1).
Le trinôme $-x^2+20x$ est donc strictement positif pour x entre les racines soit pour $x \in \left]0\,;20\right[$.

2e méthode :

On écrit une ligne supplémentaire : $x(20-x)>0$.
On fait un tableau de signes avec le signe de x et de $20-x$.
L'aire du nouveau champ est strictement supérieure à l'aire initiale du champ pour $x \in \left]0\,;20\right[$.

3°) Déterminer pour quelle valeur de x l'aire du nouveau champ est maximale.

Il s'agit d'un problème d'optimisation du second degré.

D'après le résultat de la question 1°), $\mathcal{A}(x)$ est une expression de la forme ax^2+bx+c avec $a=-1$, $b=20$, $c=8000$.

Il s'agit donc d'un polynôme du second degré.

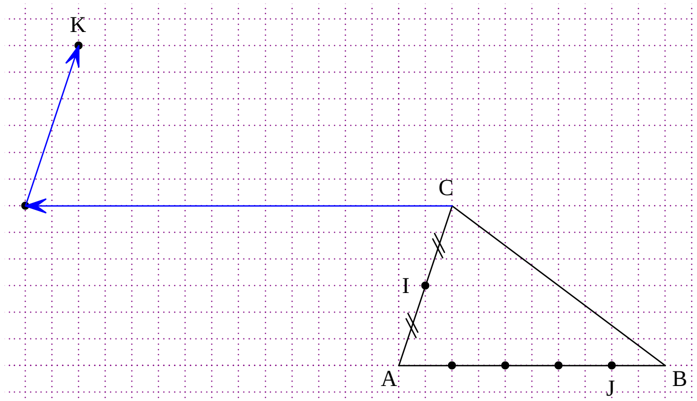
Comme le coefficient de x^2 est strictement négatif, on en déduit que l'expression $\mathcal{A}(x)$ admet un maximum atteint en $x=-\dfrac{20}{2\times(-1)}=10$ (valeur qui est bien comprise dans l'intervalle $\left]0\,;80\right[$).

L'aire du nouveau champ est maximale pour $x=10$ (et dans ce cas, elle vaut
$\mathcal{A}(100)=(100-10)\times(80+10)=8100\ \ \text{m}^2$).

V.

Soit ABC un triangle quelconque. On note I le milieu de $[\text{AC}]$, J le point défini par $5\overrightarrow{\text{AJ}}=4\overrightarrow{\text{AB}}$ et K le point tel que $3\overrightarrow{\text{AK}}+2\overrightarrow{\text{CK}}=8\overrightarrow{\text{BC}}$.

Pour résoudre les questions de cet exercice, il est demandé de ne pas rapporter le plan à un repère.
Dans l'espace vide ci-contre, faire une figure en plaçant uniquement les points I et J pour commencer.
On adoptera la disposition classique des points pour un triangle quelconque : (AB) horizontale, A à gauche de B, C au-dessus. On rappelle que la figure doit être faite dans le « cas général », et ne comporter aucune particularité d'angle ou de longueur.



1°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$.

On a $\overrightarrow{\text{IJ}}=\overrightarrow{\text{IA}}+\overrightarrow{\text{AJ}}$ (relation de Chasles).

Or I est le milieu de $[\text{AC}]$ donc $\overrightarrow{\text{IA}}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{AC}}$.

On reprend le calcul vectoriel.

$\overrightarrow{IJ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

$= \dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

On a exprimé $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

2°) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Placer le point K sur la figure.

On transforme l'égalité $3\overrightarrow{AK} + 2\overrightarrow{CK} = 8\overrightarrow{BC}$ grâce à la relation de Chasles.

$3\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}\right) + 2\overrightarrow{CK} = 8\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$5\overrightarrow{CK} + 3\overrightarrow{AC} = 8\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AB}$

$5\overrightarrow{CK} = 5\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AC} - \dfrac{8}{5}\overrightarrow{AB}$

3°) Démontrer qu'il existe un réel k que l'on précisera tel que $\overrightarrow{CK} = k\overrightarrow{IJ}$.
Que peut-on en déduire pour les droites (IJ) et (CK) ?

D'après les résultats des questions 1°) et 2°), on a $\overrightarrow{CK} = -2\overrightarrow{IJ}$.

Cette dernière égalité permet d'affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ sont colinéaires.

On en déduit que les droites (IJ) et (CK) sont parallèles.

VI.

Soit ABCD un parallélogramme. On note E le symétrique de B par rapport à C.

Dans tout l'exercice, on rapporte le plan au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. On utilisera ce repère pour résoudre les différentes questions.

Faire une figure au brouillon.

Question préliminaire : Écrire sur une même ligne les coordonnées des points A, B, C, D, E sans justifier.

$A\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ $\quad B\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ $\quad C\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ $\quad D\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ $\quad E\begin{vmatrix}1\\2\end{vmatrix}$

1ère partie

1°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BD).

Soit M un point quelconque du plan P de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$M \in (BD)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{BM}\begin{vmatrix}x-1\\y\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix}x-1 & -1\\ y & 1\end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $x-1+y=0$

si et seulement si $x+y-1=0$

(BD) a pour équation cartésienne $x+y-1=0$.

On retrouve cette équation graphiquement car le coefficient directeur est égal à – 1 et l'ordonnée à l'origine est égale à 1 (autrement dit, (BD) a pour équation réduite $y=1-x$).

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite (DE).

Soit M un point quelconque du plan P de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$M \in (DE)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DM}\begin{vmatrix}x\\y-1\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ sont colinéaires

si et seulement si $\begin{vmatrix}x & 1\\ y-1 & 1\end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $x-y+1=0$

(DE) a pour équation cartésienne $x-y+1=0$.

On retrouve cette équation graphiquement car le coefficient directeur est égal à 1 et l'ordonnée à l'origine est égale à 1 (autrement dit, (DE) a pour équation réduite $y=x+1$).

2e partie

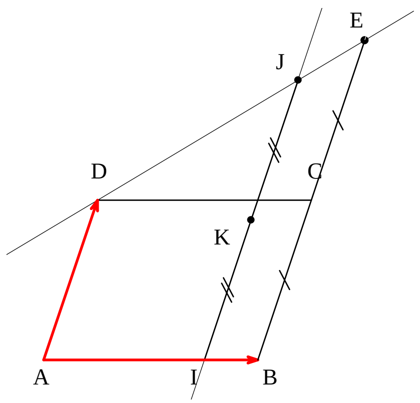
Soit I un point quelconque de la droite (AB). La parallèle à (AD) passant par I coupe la droite (DE) en un point J.
On note K le milieu de $[IJ]$.
On pose $\overrightarrow{AI} = a\overrightarrow{AB}$ où a est un réel quelconque.

Compléter la figure en prenant $a = \dfrac{3}{4}$. Cette valeur de a n'est valable que pour la figure.

Donner sans justifier les coordonnées de I.

$I\begin{vmatrix}a\\0\end{vmatrix}$

On fait une figure codée.



1°) Déterminer les coordonnées de J puis de K en fonction de a.

J est sur la parallèle à (AD) passant par I donc $x_{\text{J}} = x_{\text{I}} = a$.

$\text{J} \in (\text{DE})$ donc $y_{\text{J}} = x_{\text{J}} + 1 = a + 1$.

On en déduit que $\text{J}\left|\begin{matrix} a \\ a+1 \end{matrix}\right.$.

K est le milieu de $[\text{IJ}]$ donc $\text{K}\left|\begin{matrix} x_{\text{K}} = \dfrac{a+a}{2} = a \\ y_{\text{K}} = \dfrac{0+a+1}{2} = \dfrac{a+1}{2} \end{matrix}\right.$.

2°) Déterminer a pour que K appartienne à la droite (BD).

On attend un raisonnement par équivalences (sous forme d'une « chaîne » d'équivalences avec des « si et seulement si »).

$\text{K} \in (\text{BD})$ si et seulement si $x_{\text{K}} + y_{\text{K}} - 1 = 0$

si et seulement si $a + \dfrac{a+1}{2} - 1 = 0$

si et seulement si $2a + a + 1 - 2 = 0$

si et seulement si $3a - 1 = 0$

si et seulement si $a = \dfrac{1}{3}$

Consignes

L'usage du symbole d'équivalence est interdit. On utilisera uniquement l'expression « si et seulement si ».

Pour les figures, aucune particularité ne doit apparaître. En particulier, dans l'exercice **VI**, le triangle ABC n'est pas rectangle. On prend bien un côté horizontal.

IV. On attend une suite d'égalités du type :

$\mathcal{A}\,(x) = ...$

$= ....$

$= ....$

I. Partie 2

Pour exprimer la position relative, on n'emploie pas de symbole particulier mais on rédige de la manière suivante.

- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de Γ sur …. ;
- $\mathcal{C}$ est strictement au-dessous de Γ sur …… ;
- $\mathcal{C}$ et Γ sont sécantes au point d'abscisse … .

On vérifie que ces résultats sont en accord avec ceux du graphique.

Conseils de rédaction et de présentation

I.

II.

1°) On attend des expressions sous la forme $ax+b$ où a et b sont des réels dépendant de m.

2°) On attend une justification succincte mais claire.

3°) On prendra soin de bien présenter les calculs en colonne en justifiant éventuellement.

III.

1°) On fera très attention à la présentation des calculs en colonnes. On écrira seulement trois lignes.

2°) On tâchera de rédiger le mieux possible.

« D'après la question 1°), on a :… » ; « Considérons le polynôme … ».

On veillera à ne pas utiliser de lettres n'ayant pas été définies auparavant.

IV.

On attend des calculs vectoriels très bien présentés.

On pourra faire une figure au brouillon.

V.

1°) On adoptera le modèle de rédaction suivant à recopier intégralement sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

Soit M un point quelconque du plan de coordonnées $(x\,;\,y)$.

$\mathrm{M} \in D"$ si et seulement si ……………………………………………………………………………………………

si et seulement si $\begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = \ldots..$

si et seulement si ……………………………………………………………………………………………

si et seulement si ……………………………………………………………………………………………

si et seulement si ……………………………………………………………………………………………

$D"$ a pour équation cartésienne ……………………………………………………….. .