TS1 spé

Contrôle du mardi 20 novembre 2018 (50 min)

Prénom : ……………………………… **Nom :** ………………………………

Note : …. / 20

L'usage du symbole d'équivalence est interdit à l'exception de la réponse à la question 3°) de l'exercice **V**.
On rédigera en utilisant les mots « donc », « d'où » … ainsi que les expressions « par conséquent », « par suite »…

I. (1 point)

Compléter l'algorithme suivant qui, pour un entier naturel $n \geqslant 1$ saisi en entrée, affiche ses diviseurs positifs en sortie.

Entrée :
Saisir n

Traitement et sortie :
Pour i allant de 1 à n **Faire**
  Si …………..
    Alors afficher ….
  FinSi
FinPour

II. (2 points)

Soit n un entier relatif quelconque non nul.
Recopier et compléter la phrase : « Dans la division euclidienne de $2n$ par n, le quotient est égal à … et le reste est égal à … ».

……

……

III. (2 points)

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

Vérifier que $(3n+1)^2 = n(9n+6)+1 \quad (1)$.

……

……

Donner les deux arguments qui permettent d'affirmer que l'égalité (1) traduit la division euclidienne de $(3n+1)^2$ par n.

• Argument 1 : ……………………………………………………………………………………………

……

• Argument 2 : ……………………………………………………………………………………………

……

Recopier et compléter la phrase : « Dans la division euclidienne de $(3n+1)^2$ par n, le quotient est égal à … et le reste est égal à … ».

……

……

IV. (3 points)

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a > b$. On pose $c = a - b$.
On note q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par c.
On rappelle que q est un entier relatif et r est un entier naturel.

Écrire l'égalité correspondant à cette division euclidienne [égalité et inégalité vérifiée par r].

…………………………………. …………………..

Écrire l'égalité correspondant à la division euclidienne de b par c.
Que valent respectivement le quotient et le reste dans cette division ?

……

……

……

……

……

V. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 4 points)

1°) Soit n un entier naturel quelconque.

Justifier que $2^{3n}-10^{n}\equiv\left(-1\right)^{n}-1$ (mod. 9).

…..………

…..………

…..………

…..………

2°) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{3n}-10^{n}$ par 9 suivant les valeurs de l'entier naturel n.
On justifiera toutes les étapes avec soin.

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

VI. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Soit n un entier relatif quelconque. On pose $a=2n+11$ et $b=9n-13$.

1°) Soit d un diviseur positif commun à a et b. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
Indication : Déterminer une combinaison linéaire non nulle de a et de b à coefficients entiers relatifs qui donne un résultat indépendant de n.

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

2°) Compléter le tableau de congruences suivant.

$n\equiv\ldots$ (mod. 5)	0	1	2	3	4
$a\equiv\ldots$ (mod. 5)					
$b\equiv\ldots$ (mod. 5)					

3°) Recopier et compléter l'équivalence : « a et b sont premiers entre eux $\Leftrightarrow$ n … ». Justifier.

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

…..………

Corrigé du contrôle du 20-11-2018

I.

Compléter l'algorithme suivant qui, pour un entier naturel $n \geqslant 1$ saisi en entrée, affiche ses diviseurs positifs en sortie.

```
Entrée :
Saisir n

Traitement et sortie :
Pour i allant de 1 à n Faire
    Si ………….
        Alors afficher ….
    FinSi
FinPour
```

```
Entrée :
Saisir n

Traitement et sortie :
Pour i allant de 1 à n Faire
    Si i | n
        Alors afficher i
    FinSi
FinPour
```

II.

Soit n un entier relatif quelconque non nul.
Recopier et compléter la phrase : « Dans la division euclidienne de $2n$ par n, le quotient est égal à … et le reste est égal à … ».

Dans la division euclidienne de $2n$ par n, le quotient est égal à 2 et le reste est égal à 0.

Le résultat provient du fait que $2n$ est divisible par n.

III.

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.

Vérifier que $(3n+1)^2 = n(9n+6)+1 \quad (1)$.

$(3n+1)^2 = 9n^2+6n+1$

$\qquad = n(9n+6)+1$

Donner les deux arguments qui permettent d'affirmer que l'égalité (1) traduit la division euclidienne de $(3n+1)^2$ par n.

- Argument 1 : L'égalité (1) ne fait intervenir que des entiers naturels.
- Argument 2 : $1 < n$ puisque $n \geqslant 2$ par hypothèse.

Recopier et compléter la phrase : « Dans la division euclidienne de $(3n+1)^2$ par n, le quotient est égal à … et le reste est égal à … ».

Dans la division euclidienne de $(3n+1)^2$ par n, le quotient est égal à $9n+6$ et le reste est égal à 1.

IV.

Soit a et b deux entiers relatifs tels que $a > b$. On pose $c = a - b$.
On note q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par c.
On rappelle que q est un entier relatif et r est un entier naturel.

Écrire l'égalité correspondant à cette division euclidienne [égalité et inégalité vérifiée par r].

$$a = cq + r \qquad\qquad r < c$$

Écrire l'égalité correspondant à la division euclidienne de b par c.
Que valent respectivement le quotient et le reste dans cette division ?

On écrit : $b = b - a + a$ soit $b = a - c$.

On présente ensuite les calculs en colonne comme suit :

$b = b - a + a$

$\quad = a - c$

$\quad = cq + r - c$

$\quad = c(q-1) + r \quad (1)$

$q \in \mathbb{N}$ donc $q - 1 \in \mathbb{Z}$ et $r < c$.

Par conséquent, l'égalité (1) correspond à la division euclidienne de b par c.
Dans la division euclidienne de b par c, le quotient est égal à $q-1$ et le reste est égal à r.

V.

1°) Soit n un entier naturel quelconque.

Justifier que $2^{3n} - 10^n \equiv (-1)^n - 1$ (mod. 9).

D'une part, on a $8 \equiv -1$ (mod. 9) donc $2^3 \equiv -1$ (mod. 9).

En élevant les deux membres à l'exposant n, on obtient la relation $\left(2^3\right)^n \equiv (-1)^n$ (mod. 9) soit $2^{3n} \equiv (-1)^n$ (mod. 9).

D'autre part, on a $10 \equiv 1$ (mod. 9).

En élevant les deux membres à l'exposant n, on obtient la relation $10^n \equiv 1^n$ (mod. 9) et comme $1^n = 1$, on a : $10^n \equiv 1$ (mod. 9).

En soustrayant membre à membre les relations de congruences sur 2^{3n} et 10^n, on obtient $2^{3n} - 10^n \equiv (-1)^n - 1$ (mod. 9).

2°) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{3n} - 10^n$ par 9 suivant les valeurs de l'entier naturel n.
On justifiera toutes les étapes avec soin.

On reprend le résultat de la question précédente en discutant suivant la parité de n.

1er cas : n pair

Dans ce cas, $(-1)^n = 1$ donc $2^{3n} - 10^n \equiv 1 - 1$ (mod. 9) soit $2^{3n} - 10^n \equiv 0$ (mod. 9).

Comme $0 < 9$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de $2^{3n} - 10^n$ par 9 est égal à 0.

2e cas : n impair

Dans ce cas, $(-1)^n = -1$ donc $2^{3n} - 10^n \equiv -2$ (mod. 9).

Or $-2 \equiv 7$ (mod. 9) soit $2^{3n} - 10^n \equiv 7$ (mod. 9).

Comme $7 < 9$, on en déduit que le reste de la division euclidienne de $2^{3n} - 10^n$ par 9 est égal à 7.

Afin d'avoir une idée du résultat, on peut rentrer dans la calculatrice la fonction $\text{Y1} = 2^{3\text{X}} - 10^{\text{X}} - 9 * \text{partEnt}\dfrac{2^{3\text{X}} - 10^{\text{X}}}{9}$ (et non $\text{Y1} = \text{reste}\left(2^{3\text{X}} - 10^{\text{X}}, 9\right)$ car $2^{3n} - 10^n$ est négatif ou nul pour tout entier naturel n).