TS1

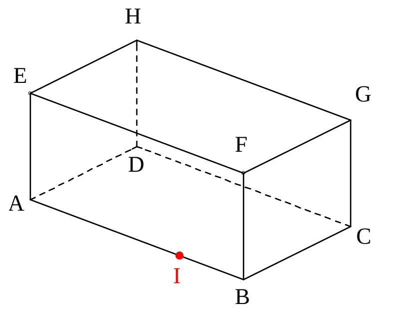
Contrôle du vendredi 16 novembre 2018 (60 minutes)

Prénom et nom : …………………………………………..……………

Note : …….. **/ 20**

I. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 1 point)

On considère un pavé droit ABCDEFGH (voir figure ci-contre). Soit I un point quelconque de l'arête $[AB]$. On note O le centre de la face BCGF.



1°) Quelle est la droite d'intersection des plans (ABG) et (CAF) ?

………….. (une seule réponse sans égalité)

2°) On note *P* le plan passant par B parallèle à (CAF).
Définir clairement en justifiant la droite Δ d'intersection des plans *P* et (ABG).
Citer avec précision le théorème utilisé.

……………………..………………………………………………………………………………..…………

……………………..………………………………………………………………………………..…………

……………………………………………………………………………………………………..…………

……………………..………………………………………………………………………………..…………

3°) Les droites (HI) et (AO) sont-elles coplanaires ? Répondre par oui ou non sans justifier.

………

4°) On suppose dans cette question que I est distinct de B.
Les droites (GI) et (OD) sont-elles coplanaires ? Répondre par oui ou non sans justifier.

………

5°) Tracer avec soin en laissant les traits de construction apparents la section du pavé par le plan (IEG).
On nommera les points qui définissent la section.
On pensera aux pointillés pour les segments cachés.
On pourra éventuellement colorier cette section.

II. (4 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

À tout entier naturel $n \geqslant 1$ on associe la fonction $f_n : x \mapsto \left(e^x - 1\right)^n$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_n'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ ……………………………… (une seule égalité)

2°) Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point $A(\ln 2 \,; 1)$ et calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ en ce point. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible en fonction de *n*.

……………………..………………………………………………………………………………..…………

……………………..………………………………………………………………………………..…………

……………………………………………………………………………………………………..…………

……………………..………………………………………………………………………………..…………

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_2(x) = 4 \quad (E)$.

……………………..………………………………………………………………………………..…………

……………………..………………………………………………………………………………..…………

……………………………………………………………………………………………………..…………

……………………..………………………………………………………………………………..…………

III. (3 points : 2 points + 1 point)

Démontrer que la fonction F : $x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{x}$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto x\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$.

On fera très attention à la rédaction et aux notations en suivant le modèle donné dans le cadre ci-dessous (ne rien écrire dans ce cadre).

À l'aide de ce résultat déterminer une primitive G de la fonction $g : x \mapsto (2-3x)\mathrm{e}^{x}$ sur $\mathbb{R}$. Justifier brièvement.

- Commencer par écrire la phrase suivante : « D'après les règles d'opérations sur les fonctions dérivables, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».
- Faire ensuite le calcul directement sans phrase introductive.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F}'(x) =$ ....

$=$ ....

$=$ ....

- Rédiger ensuite une phrase de conclusion sur le modèle suivant [on notera que l'on écrit F et non $\mathrm{F}(x)$, f et non $f(x)$] : « On en déduit que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. »

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

IV. (2 points)

On rappelle que la partie entière d'un réel x est l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On la note $\mathrm{E}(x)$.

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}\right)$ est constante sur $\mathbb{R}$.

....

....

....

....

....

....

....

V. (3 points)

À tout entier naturel n on associe la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\left(\mathrm{e}^{-3x+2}\right)^{n}}{\mathrm{e}^{-2x-6} \times \mathrm{e}^{-4x+3}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Est-il possible de choisir n tel que f_n soit constante sur $\mathbb{R}$? Si oui préciser la valeur de n.

....

....

....

....

VI. (2 points)

La proposition « Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}} = 1-\mathrm{e}^{-x}$ » est-elle vraie ou fausse ?

……… (une seule réponse, sans justifier)

Corrigé du contrôle du 16-11-2018

I.

On considère un pavé droit ABCDEFGH (voir figure ci-contre). Soit I un point quelconque de l'arête $[AB]$. On note O le centre de la face BCGF.

1°) Quelle est la droite d'intersection des plans (ABG) et (CAF) ?

(AO) (une seule réponse sans égalité)

2°) On note P le plan passant par B parallèle à (CAF).
Définir clairement en justifiant la droite Δ d'intersection des plans P et (ABG).
Citer avec précision le théorème utilisé.

B appartient aux plans P et (ABG) donc $B \in \Delta$.

De plus $P \,//\, (CAF)$.

D'après la question, (ABG) coupe (CAF) selon la droite (AO).

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

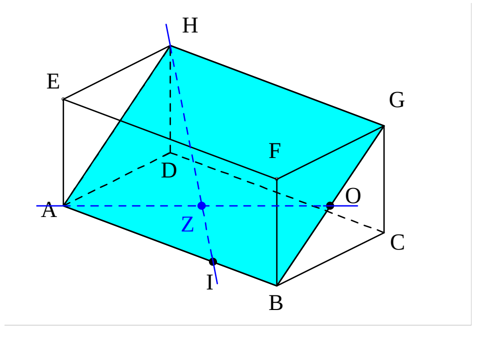
On en déduit que $\Delta \,//\, (AO)$.

Δ est donc la droite passant par B et parallèle à (AO).

3°) Les droites (HI) et (AO) sont-elles coplanaires ? Répondre par oui ou non sans justifier.

oui

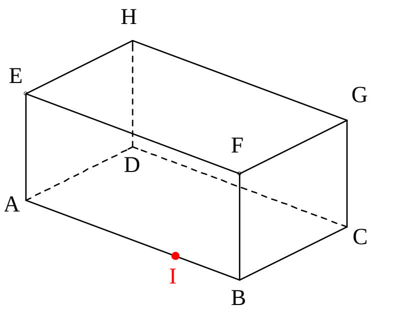
Les droites (HI) et (AO) sont contenues dans le plan (ABG). Elles sont sécantes en un point Z.

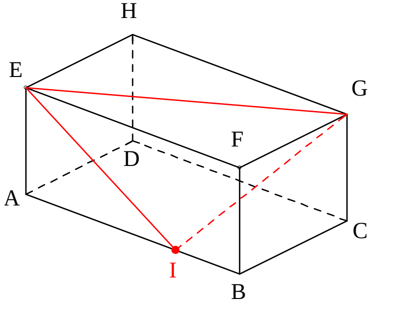


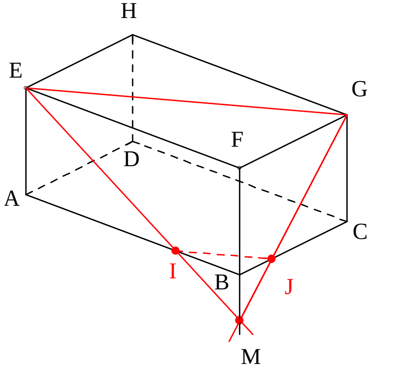
4°) On suppose dans cette question que I est distinct de B.
Les droites (GI) et (OD) sont-elles coplanaires ? Répondre par oui ou non sans justifier.

non

5°) Tracer avec soin en laissant les traits de construction apparents la section du pavé par le plan (IEG).
On nommera les points qui définissent la section.
On pensera aux pointillés pour les segments cachés.
On pourra éventuellement colorier cette section.







On utilise la méthode de prolongement hors-solide.

On construit le point M d'intersection des droites (IE) et (BF).
On construit ensuite le point J d'intersection des droites (GM et (BC).
La section du pavé droit par le plan (IEG) est le quadrilatère IJGE qui est un trapèze.

II.

À tout entier naturel $n \geqslant 1$ on associe la fonction $f_n : x \mapsto \left(e^x - 1\right)^n$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f_n'(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f_n'(x) = n e^x \left(e^x - 1\right)^{n-1} \text{ (une seule égalité)}$$

On utilise la formule $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$.

2°) Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point $A\left(\ln 2 ; 1\right)$ et calculer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ en ce point. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible en fonction de *n*.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n(\ln 2) = \left(e^{\ln 2} - 1\right)^n$

$= (2-1)^n \qquad (\text{car } e^{\ln 2} = 2)$

$= 1^n$

$= 1$

Toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent donc par le point $A\left(\ln 2 ; 1\right)$.

Pour déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ en A, on calcule $f_n'(\ln 2)$. Il est inutile de déterminer une équation de la tangente.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad f_n'(\ln 2) = n e^{\ln 2}\left(e^{\ln 2} - 1\right)^n$

$= 2n$

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_n$ en A est égal à $2n$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f_2(x) = 4 \quad (E)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_2(x) = \left(e^x - 1\right)^2$

$(E) \Leftrightarrow \left(e^x - 1\right)^2 = 4$

$\Leftrightarrow e^x - 1 = 2 \text{ ou } e^x - 1 = -2$

$\Leftrightarrow e^x = 3 \text{ ou } e^x = -1 \text{ (impossible)}$

$\Leftrightarrow x = \ln 3$

Soit S l'ensemble des solutions de (E).

$S = \{ \ln 3 \}$

Une méthode maladroite consiste à développer le premier membre puis à effectuer le changement d'inconnue $X = e^x$.

III.

Démontrer que la fonction $F : x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

On fera très attention à la rédaction et aux notations en suivant le modèle donné dans le cadre ci-dessous (ne rien écrire dans ce cadre).

À l'aide de ce résultat déterminer une primitive G de la fonction $g : x \mapsto (2-3x)e^x$ sur $\mathbb{R}$. Justifier brièvement.

- Commencer par écrire la phrase suivante : « D'après les règles d'opérations sur les fonctions dérivables, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ ».
- Faire ensuite le calcul directement sans phrase introductive.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots$

- Rédiger ensuite une phrase de conclusion sur le modèle suivant [on notera que l'on écrit F et non $F(x)$, *f* et non $f(x)$] : « On en déduit que F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$. »

D'après les règles d'opérations sur les fonctions dérivables, F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = 1 \times e^x + (x-1) \times e^x$

$= (1 + x - 1) \times e^x$

$= xe^x$

$= f(x)$

On en déduit que F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 2e^x - 3xe^x$

$= 2e^x - 3f(x)$

Une primitive de la fonction exponentielle est la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F.

Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{G}(x) = 2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{F}(x)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{G}(x) = 2\mathrm{e}^x - 3(x-1)\mathrm{e}^x$$

$$= (2 - 3x + 3)\mathrm{e}^x$$

$$= (5 - 3x)\mathrm{e}^x$$

IV.

On rappelle que la partie entière d'un réel x est l'unique entier relatif n tel que $n \leqslant x < n+1$. On la note $\mathrm{E}(x)$.

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\right)$ est constante sur $\mathbb{R}$.

On sait que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} < 1$.

À fortiori, on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} < 1$.

Par suite, $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1}\right) = 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0$. On en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}$.

On écrit bien « f (et non $f(x)$) est constante sur $\mathbb{R}$ ».

V.

À tout entier naturel n on associe la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{\left(\mathrm{e}^{-3x+2}\right)^n}{\mathrm{e}^{-2x-6} \times \mathrm{e}^{-4x+3}}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Est-il possible de choisir n tel que f_n soit constante sur $\mathbb{R}$? Si oui préciser la valeur de n.

On commence par simplifier l'expression de f_n.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{n(-3x+2)}}{\mathrm{e}^{-6x-3}}$$

$$= \mathrm{e}^{(6-3n)x+2n+3}$$

Pour que f_n soit constante sur $\mathbb{R}$, il suffit de choisir n tel que $6 - 3n = 0$ ce qui donne $n = 2$.

Il s'agit en fait d'une condition nécessaire et suffisante. La seule valeur de n pour laquelle f_n est constante est 2.

Dans ce cas, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_2(x) = \mathrm{e}^7$.

VI.

La proposition « Pour tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ » est-elle vraie ou fausse ?

vrai (une seule réponse, sans justifier)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x - 1 + 1}{\mathrm{e}^x - 1}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} - \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-x}$$