TS1
non spé

Contrôle du mercredi 17 octobre 2018 (1 heure)

Partie réservée aux élèves ne faisant pas la spécialité mathématiques

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note :** …….. **/ 20**

I. (4 points : 1 point + 3 points)

On considère l'équation $z^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)z+8=0$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Calculer le discriminant réduit de (E).
En déduire les racines de (E).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Dans les exercices **II.** à **V.**, la notation $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du réel x.
On rappelle que c'est l'unique entier relatif p tel que $p\leqslant x<p+1$.

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

1°) **Question de cours**

Compléter l'équivalence suivante :

$$\mathrm{E}(x)=x \Leftrightarrow x\in\text{........}$$

2°) Donner sans justifier l'ensemble de définition de la fonction $f : x\mapsto \dfrac{1}{x-\mathrm{E}(x)}$.

………………… (un seul résultat, sans égalité)

III. (4 points)

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout réel x on a $\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{E}(2x)$.

Soit x un réel quelconque. On pose pour cela $p=\mathrm{E}(x)$. On sait alors que $p\leqslant x<p+1$.

On envisage deux cas selon que $p\leqslant x<p+\dfrac{1}{2}$ (1$^{\text{er}}$ cas) ou que $p+\dfrac{1}{2}\leqslant x<p+1$ (2$^{\text{e}}$ cas).

La démarche du raisonnement est entièrement détaillée ci-dessous.
Il est demandé de la lire puis après l'avoir comprise, de rédiger sur le même modèle, avec les adaptations nécessaires, la démonstration dans le 2$^{\text{e}}$ cas.

1$^{\text{er}}$ cas : $p\leqslant x<p+\dfrac{1}{2}$ (1)

En additionnant $\dfrac{1}{2}$ à chaque membre de l'inégalité (1), on obtient $p+\dfrac{1}{2}\leqslant x+\dfrac{1}{2}<p+1$.

Comme $p+\dfrac{1}{2}>p$, on a $p\leqslant x+\dfrac{1}{2}<p+1$ $(1')$.

L'inégalité $(1')$ permet d'affirmer que $\mathrm{E}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=p$.

Par ailleurs, en multipliant par 2 qui est un réel strictement positif chaque membre de l'inégalité (1), on obtient $2p\leqslant 2x<2p+1$ $(1'')$.

L'inégalité $(1'')$ permet d'affirmer que $\mathrm{E}(2x)=2p$.

On a donc $\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=p+p=2p=\mathrm{E}(2x)$.

2^e^ cas : $p+\frac{1}{2}\leqslant x<p+1 \quad (2)$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

IV. (2 points)

Recopier et compléter la phrase : « L'ensemble des réels x tels que $\mathrm{E}(x)$ soit pair est la réunion des intervalles de la forme … avec … ».

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

1°) Quelle condition doit-on écrire afin que l'algorithme ci-dessous pour un réel x positif ou nul saisi en entrée, la valeur affichée en sortie soit égale à sa partie entière ? Six choix sont proposés. Entourer la réponse correcte.

Entrée :
Saisir x

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque …….. **Faire**
  n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher n

$n>x$ $\quad$ $n+1>x$ $\quad$ $n\leqslant x$ $\quad$ $n<x$ $\quad$ $n+1<x$ $\quad$ $n\geqslant x$

2°) Compléter l'algorithme ci-dessous qui pour un réel x négatif ou nul saisi en entrée affiche en sortie la partie entière de x.

Entrée :
Saisir x

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $n>x$ **Faire**
  n prend la valeur ……..
FinTantque

Sortie :
Afficher n

VI. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{-x}$ si $x\leqslant 0$ et $f(x)=x^2$ si $x>0$.

1°) La fonction f est-elle continue ? Répondre par oui ou non sans justifier.

…………

2°) Soit a un réel strictement positif. Déterminer les antécédents de a par f.

………………… (écrire les valeurs séparées par des points-virgules, sans égalités)

Corrigé du contrôle du 17-10-2018

I.

On considère l'équation $z^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)z+8=0$ (E) d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Calculer le discriminant réduit de (E).
En déduire les racines de (E).

(E) est une équation complexe du second degré à coefficients réels.

On note Δ' le discriminant réduit de (E).

$$\begin{aligned}\Delta' &= \left[-\left(\sqrt{3}+1\right)\right]^2-1\times 8\\ &= \left(\sqrt{3}+1\right)^2-8\\ &= 2\sqrt{3}-4\end{aligned}$$

On a $\Delta'<0$ donc l'équation (E) admet deux racines complexes distinctes conjuguées z_1 et z_2 dont le calcul est donné ci-dessous.

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt{3}+1-\mathrm{i}\sqrt{4-2\sqrt{3}}\\ &= \sqrt{3}+1-\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)\\ &= \sqrt{3}+1+\mathrm{i}\left(1-\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \sqrt{3}+1+\mathrm{i}\sqrt{4-2\sqrt{3}}\\ &= \sqrt{3}+1+\mathrm{i}\left(\sqrt{3}-1\right)\end{aligned}$$

On obtient les expressions finales des racines soit en utilisant la calculatrice soit en observant que $\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$.

Dans les exercices **II.** à **V.**, la notation $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière du réel x.
On rappelle que c'est l'unique entier relatif p tel que $p\leqslant x<p+1$.

II.

1°) **Question de cours**

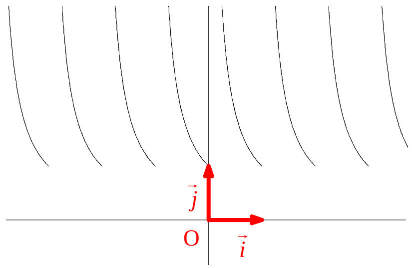
Compléter l'équivalence suivante :

$$\mathrm{E}(x)=x \Leftrightarrow x\in\mathbb{Z}$$

2°) Donner sans justifier l'ensemble de définition de la fonction $f: x\mapsto \dfrac{1}{x-\mathrm{E}(x)}$.

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ (un seul résultat, sans égalité)

On lit $\mathbb{R}$ privé de $\mathbb{Z}$.



III.

Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout réel x on a $\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=\mathrm{E}(2x)$.

Soit x un réel quelconque. On pose pour cela $p=\mathrm{E}(x)$. On sait alors que $p\leqslant x<p+1$.

On envisage deux cas selon que $p\leqslant x<p+\dfrac{1}{2}$ (1$^{\text{er}}$ cas) ou que $p+\dfrac{1}{2}\leqslant x<p+1$ (2$^{\text{e}}$ cas).

La démarche du raisonnement est entièrement détaillée ci-dessous.
Il est demandé de la lire puis après l'avoir comprise, de rédiger sur le même modèle, avec les adaptations nécessaires, la démonstration dans le 2$^{\text{e}}$ cas.

1$^{\text{er}}$ cas : $p\leqslant x<p+\dfrac{1}{2}$ (1)

En additionnant $\dfrac{1}{2}$ à chaque membre de l'inégalité (1), on obtient $p+\dfrac{1}{2}\leqslant x+\dfrac{1}{2}<p+1$.

Comme $p+\dfrac{1}{2}>p$, on a $p\leqslant x+\dfrac{1}{2}<p+1$ $(1')$.

L'inégalité $(1')$ permet d'affirmer que $\mathrm{E}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=p$.

Par ailleurs, en multipliant par 2 qui est un réel strictement positif chaque membre de l'inégalité (1), on obtient $2p\leqslant 2x<2p+1$ $(1'')$.

L'inégalité $(1'')$ permet d'affirmer que $\mathrm{E}(2x)=2p$.

On a donc $\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=p+p=2p=\mathrm{E}(2x)$.

2[e] cas : $p+\frac{1}{2}\leqslant x<p+1 \quad (2)$

En additionnant $\frac{1}{2}$ à chaque membre de l'inégalité (2), on obtient $p+1\leqslant x+\frac{1}{2}<p+\frac{3}{2}$.

Comme $p+\frac{3}{2}<p+2$, on a $p+1\leqslant x+\frac{1}{2}<p+2 \quad (2')$.

L'inégalité $(2')$ permet d'affirmer que $\mathrm{E}\left(x+\frac{1}{2}\right)=p+1$.

Par ailleurs, en multipliant par 2 qui est un réel strictement positif chaque membre de l'inégalité (2), on obtient $2p+1\leqslant 2x<2p+2 \quad (2'')$.

L'inégalité $(2'')$ permet d'affirmer que $\mathrm{E}(2x)=2p+1$.

On a donc $\mathrm{E}(x)+\mathrm{E}\left(x+\frac{1}{2}\right)=p+p+1=2p+1=\mathrm{E}(2x)$.

IV.

Recopier et compléter la phrase : « L'ensemble des réels *x* tels que $\mathrm{E}(x)$ soit pair est la réunion des intervalles de la forme … avec … ».

L'ensemble des réels *x* tels que $\mathrm{E}(x)$ soit pair est la réunion des intervalles de la forme $[k\,;\,k+1[$ avec *k* entier relatif pair.

L'ensemble des réels *x* tels que $\mathrm{E}(x)$ soit pair est la réunion des intervalles de la forme $[2k\,;\,2k+1[$ avec *k* entier relatif.

Remarque :

L'écriture mathématique de l'ensemble utilise la notation de la réunion.
Cet ensemble peut s'écrire $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}[k\,;\,k+1[$.

V.

1°) Quelle condition doit-on écrire afin que l'algorithme ci-dessous pour un réel *x* positif ou nul saisi en entrée, la valeur affichée en sortie soit égale à sa partie entière ? Six choix sont proposés. Entourer la réponse correcte.

Entrée :
Saisir *x*

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque …….. **Faire**
    n prend la valeur $n+1$
FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

$n>x$ $\qquad$ $n+1>x$ $\qquad$ $n\leqslant x$ $\qquad$ $n<x$ $\qquad$ $n+1<x$ $\qquad$ $n\geqslant x$

2°) Compléter l'algorithme ci-dessous qui pour un réel *x* négatif ou nul saisi en entrée affiche en sortie la partie entière de *x*.

Entrée :
Saisir *x*

Initialisation :
n prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $n>x$ **Faire**
    n prend la valeur $n-1$
FinTantque

Sortie :
Afficher *n*

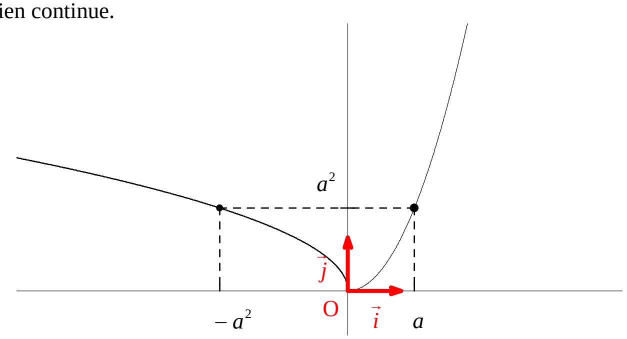
VI.

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{-x}$ si $x\leqslant 0$ et $f(x)=x^2$ si $x>0$.

1°) La fonction *f* est-elle continue ? Répondre par oui ou non sans justifier.

oui

Le mieux est de tracer la représentation graphique de la fonction *f*.
On observe que *f* est bien continue.



2°) Soit *a* un réel strictement positif. Déterminer les antécédents de *a* par *f*.

$-a^2$; $\sqrt{a}$ (écrire les valeurs séparées par des points-virgules, sans égalités)

On résout l'équation $f(x)=a$ (1).

On utilise la définition de l'image d'un réel *x* par *f* suivant les valeurs de *x* : $f(x)=\sqrt{-x}$ si $x\leqslant 0$ et $f(x)=x^2$ si $x>0$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{-x}=a\\ x\leqslant 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x^2=a\\ x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-x=a^2\\ x\leqslant 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=\sqrt{a}\\ x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-a^2\\ x\leqslant 0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}x=\sqrt{a}\\ x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=-a^2 \text{ ou } x=\sqrt{a}$$