TS1

Contrôle du mercredi 17 octobre 2018 (3 heures)

Partie commune à tous les élèves (2 heures)

Prénom et nom : ……………………………………………..…………… **Note : ……../ 20**

I. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ définie par $u_n = 2^{2n+2} - 4^n$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Justifier que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 3 \times 4^n$. En déduire la nature de (u_n).

……

……

……

……

2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exprimer S_n en fonction de *n* sous la forme la plus simple possible.

……

……

……

……

……

II. (1 point)

Calculer la somme $S = 2 + 11 + 20 + 29 + ... + 2018$.

……

……

……

……

……

……

III. (1 point)

On considère la suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $u_1 = 486$ et $u_4 = -144$.

Que vaut sa raison *q* ?

……

……

……

IV. (3 points)

Pour tout entier naturel *n*, on définit la phrase $P(n)$: « $5^n > 3^n + 4^n$ ».

• Les propositions $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ sont-elles vraies ou fausses ? Justifier uniquement pour l'une des propositions.

……

……

……

……

……

• On considère un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $5^k > 3^k + 4^k$.

Le but de la question est de démontrer qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $5^{k+1} > 3^{k+1} + 4^{k+1}$.

Lire puis compléter les lignes ci-dessous.

En multipliant les deux membres de l'inégalité $5^k > 3^k + 4^k$ par 5 qui est un réel strictement positif, on obtient $5 \times 5^k > 5 \times \left(3^k + 4^k\right)$ soit $5^{k+1} > 5 \times 3^k + 5 \times 4^k \quad (a)$.

On considère ensuite les inégalités $5 > 3 \quad (1)$ et $5 > 4 \quad (2)$.

En multipliant les deux membres de (1) par 3^k qui est strictement positif, on obtient l'inégalité $5 \times 3^k > 3^{k+1} \quad (1')$.

En multipliant les deux membres de (2) par … qui est strictement positif, on obtient l'inégalité $5 \times 4^k >$ ...... $(2')$.

En additionnant membre à membre les inégalités $(1')$ et $(2')$, on obtient l'inégalité

…………………………………………………….... (b).

Les inégalités (a) et (b) donnent $5^{k+1} > 3^{k+1} + 4^{k+1}$ qui permet d'affirmer que $P(k+1)$ est vraie.

• Formuler une conclusion sous la forme d'une phrase.

………

………

………

V. (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z_1 + z_2 + 2\overline{z_1} = 7 + 3\mathrm{i} & (1) \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 + \mathrm{i} & (2) \end{cases}$.

Indications :

• On ne passera pas par la forme algébrique de z_1 et z_2.

• On commencera par calculer $z_1 + z_2$.

………………………….. (une seule réponse, sans détailler la démarche)

VI. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

Soit a un nombre réel donné. On considère le polynôme $P(z) = z^3 + \mathrm{i}z^2 + az + \mathrm{i}a$ de variable $z \in \mathbb{C}$.

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Calculer $P(1+\mathrm{i})$ en fonction de a. On donnera le résultat sous forme algébrique.

Déterminer a tel que $P(1+\mathrm{i})$ soit imaginaire pur.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) On suppose dans cette question que a est un réel strictement positif.

Déterminer les racines complexes de $P(z)$.

Indication : Factoriser $P(z)$ en observant que $P(z) = \left(z^3 + \mathrm{i}z^2\right) + a(z + \mathrm{i})$.

………

………

………

………

………

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

VII. (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point ; 5°) 2 points ; 6°) bonus sur 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.

$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\qquad f'(x) =$ .... (un seul résultat)

Compléter la phrase suivante :

f' s'annule pour $x =$ ....

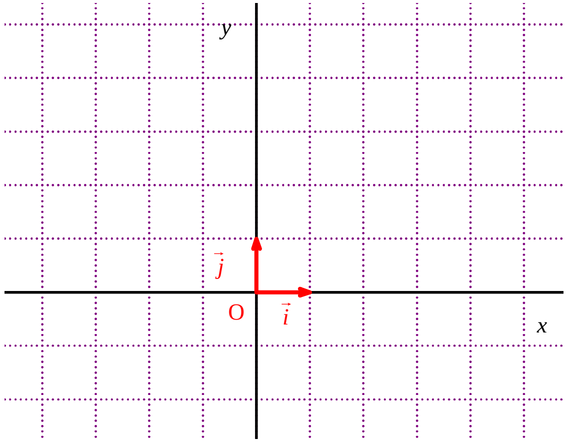
2°) Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

3°) On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.

Compléter la phrase suivante :

La tangente en A à $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur …………… (un seul résultat sous la forme la plus simple possible).

4°) Tracer avec soin la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la tangente horizontale sur le graphique ci-contre.
On admettra sans démonstration que $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente verticale au point O.



5°) Déterminer le nombre de solutions dans $[0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x) = -1 \quad (\text{E})$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement de chacune des solutions par deux décimaux consécutifs d'ordre 3 (c'est-à-dire deux décimaux consécutifs qui s'écrivent avec trois chiffres après la virgule).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

6°) Déterminer l'abscisse du point B de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 1.

Indication : On sera amené à résoudre une équation et à utiliser le changement d'inconnue $X=\sqrt{x}$.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

VIII.

On considère une fonction f définie sur un intervalle $I=[a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a<b$.

On suppose que f vérifie les conditions C_1, C_2, C_3 suivantes :

C_1 : f est continue sur I ;

C_2 : f est strictement monotone sur I ;

C_3 : $f(a)$ et $f(b)$ soient non nuls et de signes différents.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe un unique réel $x_0\in[a\,;b]$ tel que $f(x_0)=0$.

On donne ci-dessous l'algorithme correspondant à la méthode de dichotomie afin de déterminer un encadrement de x_0 d'amplitude inférieure ou égale au réel e strictement positif saisi en entrée.

Les noms des variables reprennent les notations précédentes à l'exception de e.

Entrées :
Saisir a et b
Saisir f
Saisir e

Traitement :
Tantque $b-a>e$ **Faire**
  m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
  Si $f(m)=0$
    Alors a prend la valeur m
       b prend la valeur m
  FinSi
  Si $f(a)\times f(......)>0$
    Alors a prend la valeur m
  FinSi
  Si $f(a)\times f(......)<0$
    Alors b prend la valeur m
  FinSi
FinTantque

Sortie :
Afficher a et b

1°) Compléter cet algorithme.

2°) Écrire l'inégalité vérifiée par les valeurs de a et b affichées en sortie et la valeur de e saisie en entrée.

………………………………… (une seule inégalité)

Corrigé du contrôle du 17-10-2018

I.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ définie par $u_n = 2^{2n+2} - 4^n$ pour tout entier naturel n.

1°) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times 4^n$. En déduire la nature de (u_n).

1ère façon :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^{2n+2} - 4^n$$
$$= 2^{2n} \times 2^2 - 4^n$$
$$= 4^n \times 4 - 4^n$$
$$= 4^n \times 4 - 4^n \times 1$$
$$= 4^n \times (4-1)$$
$$= 3 \times 4^n$$

2e façon :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^{2n+2} - 4^n$$
$$= 2^{2(n+1)} - 4^n$$
$$= \left(2^2\right)^{n+1} - 4^n$$
$$= 4^{n+1} - 4^n$$
$$= 4^n \times 4 - 4^n$$
$$= 4^n \times (4-1)$$
$$= 3 \times 4^n$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 4 (et de premier terme $u_0 = 3$).

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exprimer S_n en fonction de n sous la forme la plus simple possible.

S_n est la somme de tous les termes de u_0 à u_n. Le nombre de termes de cette somme est égal à $n+1$.

Pour déterminer l'expression simplifiée de S_n, on utilise la formule donnant l'expression simplifiée des termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = u_0 \times \frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1}$$
$$= 3 \times \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$
$$= 4^{n+1} - 1$$

II.

Calculer la somme $S = 2 + 11 + 20 + 29 + ... + 2018$.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 9n + 2$ pour tout entier naturel n.

(u_n) est une suite arithmétique de raison 9.

On a $u_0 = 2$ et $u_{224} = 2018$.

$$S = \sum_{k=0}^{k=224} u_k$$
$$= 225 \times \frac{2 + 2018}{2}$$
$$= 227250$$

On peut utiliser la calculatrice pour calculer S ou pour vérifier le résultat.

III.

On considère la suite géométrique (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que $u_1 = 486$ et $u_4 = -144$.
Que vaut sa raison q ?

On a $u_4 = q^3 \times u_1$ soit $-144 = q^3 \times 486$ d'où $q^3 = -\frac{144}{486}$ soit $q^3 = -\frac{8}{27}$.

On en déduit que $q = -\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ d'où $q = -\frac{2}{3}$.

IV.

Pour tout entier naturel n, on définit la phrase $P(n)$: « $5^n > 3^n + 4^n$ ».

• Les propositions $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ sont-elles vraies ou fausses ? Justifier uniquement pour l'une des propositions.

Les propositions $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$ sont fausses.
Les propositions $P(3)$ et $P(4)$ sont vraies.

Justifions que $P(3)$ est vraie.

D'une part, $5^3 = 125$.
D'autre part, $3^3 + 4^3 = 91$.
On a donc $5^3 > 3^3 + 4^3$. Par conséquent, $P(3)$ est vraie.

• On considère un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $5^k > 3^k + 4^k$.
Le but de la question est de démontrer qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $5^{k+1} > 3^{k+1} + 4^{k+1}$.
Lire puis compléter les lignes ci-dessous.

En multipliant les deux membres de l'inégalité $5^k > 3^k + 4^k$ par 5 qui est un réel strictement positif, on obtient $5\times 5^k > 5\times\left(3^k + 4^k\right)$ soit $5^{k+1} > 5\times 3^k + 5\times 4^k \quad (a)$.
On considère ensuite les inégalités $5 > 3 \quad (1)$ et $5 > 4 \quad (2)$.

En multipliant les deux membres de (1) par 3^k qui est strictement positif, on obtient l'inégalité $5\times 3^k > 3^{k+1} \quad (1')$.

En multipliant les deux membres de (2) par 4^k qui est strictement positif, on obtient l'inégalité $5\times 4^k > 4^{k+1} \quad (2')$.

En additionnant membre à membre les inégalités $(1')$ et $(2')$, on obtient l'inégalité

$5\times 3^k + 5\times 4^k > 3^{k+1} + 4^{k+1} \quad (b)$.

Les inégalités (a) et (b) donnent $5^{k+1} > 3^{k+1} + 4^{k+1}$ qui permet d'affirmer que $P(k+1)$ est vraie.

• Formuler une conclusion sous la forme d'une phrase.

On a démontré que $P(3)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel k, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

V.

Résoudre dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} z_1 + z_2 + 2\overline{z_1} = 7 + 3\mathrm{i} & (1) \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} = 1 + \mathrm{i} & (2) \end{cases}$.

Indications :

• On ne passera pas par la forme algébrique de z_1 et z_2.

• On commencera par calculer $z_1 + z_2$.

$(3 - 2\mathrm{i}\,;\, \mathrm{i} - 2)$ (une seule réponse, sans détailler la démarche)

Par conjugaison l'égalité (2) donne immédiatement $z_1 + z_2 = 1 - \mathrm{i} \quad (2')$.
On substitue alors dans l'égalité (1).
On obtient $1 - \mathrm{i} + 2\overline{z_1} = 7 + 3\mathrm{i}$ qui donne $\overline{z_1} = 3 + 2\mathrm{i}$ d'où $z_1 = 3 - 2\mathrm{i}$.
Grâce à $(2')$, on en déduit que $z_2 = \mathrm{i} - 2$.

On a en fait résolu le système par équivalences.

VI.

Soit a un nombre réel donné. On considère le polynôme $P(z) = z^3 + \mathrm{i}z^2 + az + \mathrm{i}a$ de variable $z \in \mathbb{C}$.
Les deux questions sont indépendantes.

1°) Calculer $P(1+\mathrm{i})$ en fonction de a. On donnera le résultat sous forme algébrique.
Déterminer a tel que $P(1+\mathrm{i})$ soit imaginaire pur.

$$\begin{aligned} P(1+\mathrm{i}) &= (1+\mathrm{i})^3 + \mathrm{i}(1+\mathrm{i})^2 + a(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}a \\ &= -2 + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}\times 2\mathrm{i} + a + \mathrm{i}a + \mathrm{i}a \\ &= -2 + 2\mathrm{i} - 2 + a + \mathrm{i}a + \mathrm{i}a \\ &= a - 4 + 2\mathrm{i}(a+1) \end{aligned}$$

Comme a est un réel par hypothèse, on a obtenu l'écriture algébrique de $P(1+\mathrm{i})$.

$$\begin{aligned} P(1+\mathrm{i}) \text{ imaginaire pur} &\Leftrightarrow a - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 4 \end{aligned}$$

Remarque : Pour $a = 4$, $P(1+\mathrm{i}) = 10\mathrm{i}$.

2°) On suppose dans cette question que a est un réel strictement positif.
Déterminer les racines complexes de $P(z)$.
Indication : Factoriser $P(z)$ en observant que $P(z) = \left(z^3 + \mathrm{i}z^2\right) + a(z + \mathrm{i})$.

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) &= \left(z^3 + \mathrm{i}z^2\right) + a(z+\mathrm{i}) \\ &= z^2(z+\mathrm{i}) + a(z+\mathrm{i}) \\ &= (z+\mathrm{i})\left(z^2 + a\right) \end{aligned}$$

On doit résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0 \quad (1)$.

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (z+\mathrm{i})\left(z^2+a\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z + \mathrm{i} = 0 \text{ ou } z^2 + a = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -\mathrm{i} \text{ ou } z^2 = -a \\ &\Leftrightarrow z = -\mathrm{i} \text{ ou } z = \mathrm{i}\sqrt{a} \text{ ou } z = \mathrm{i}\sqrt{a} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $z^2 = -a$ sont $\mathrm{i}\sqrt{a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{a}$ car a est un réel strictement positif dans cette question.

1er cas : $a \neq 1$

Les racines complexes de $P(z)$ sont $-\mathrm{i}$, $\mathrm{i}\sqrt{a}$, $-\mathrm{i}\sqrt{a}$.

2e cas : $a = 1$

Les racines complexes de $P(z)$ sont i et – i.

VII.

On considère la fonction $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. On donnera le résultat sous la forme d'un seul quotient.

$$\forall x \in \,]0\,;+\infty[\qquad f'(x) = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}} \quad \text{(un seul résultat)}$$

$\forall x \in \,]0\,;+\infty[\qquad f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x-3) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (formule de dérivation d'un produit)

$$= \frac{2\left(\sqrt{x}\right)^2 + x - 3}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$$

Compléter la phrase suivante :

f' s'annule pour $x = 1$.

2°) Faire un tableau comprenant l'étude du signe de $f'(x)$ et les variations de f.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $3x-3$		$-$	0	$+$	
Signe de $2\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↘	-2	↗	

3°) On note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3.

Compléter la phrase suivante :

La tangente en A à $\mathscr{C}$ a pour coefficient directeur $\sqrt{3}$ (un seul résultat sous la forme la plus simple possible).

On calcule $f'(3)$.

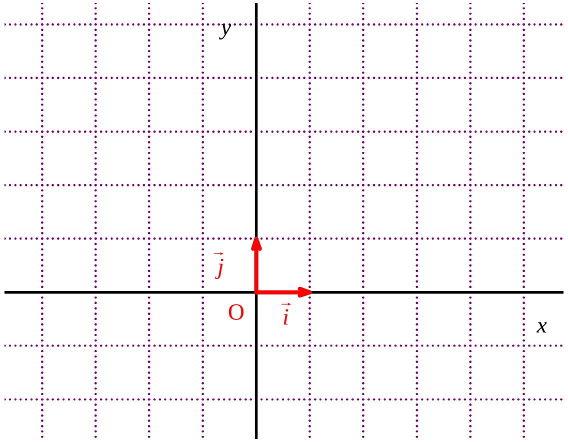
$$f'(3) = \frac{9-3}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3}$$

4°) Tracer avec soin la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que la tangente horizontale sur le graphique ci-contre.
On admettra sans démonstration que $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente verticale au point O.



Voir question suivante.

$\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
On la représente sur le graphique sous la forme d'une double flèche.

$\mathscr{C}$ admet une demi-tangente verticale au point O donc $\mathscr{C}$ « part » perpendiculairement à l'axe des abscisses.

5°) Déterminer le nombre de solutions dans $[0\,;+\infty[$ de l'équation $f(x)=-1$ (E).
Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement de chacune des solutions par deux décimaux consécutifs d'ordre 3 (c'est-à-dire deux décimaux consécutifs qui s'écrivent avec trois chiffres après la virgule).

On se sert du graphique pour localiser les solutions de (E).
Attention, on ne demande pas de résoudre l'équation (E).

On commence par étudier la continuité de f sur $[0\,;+\infty[$ en vue d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur des intervalles de la forme $[a\,;b]$.

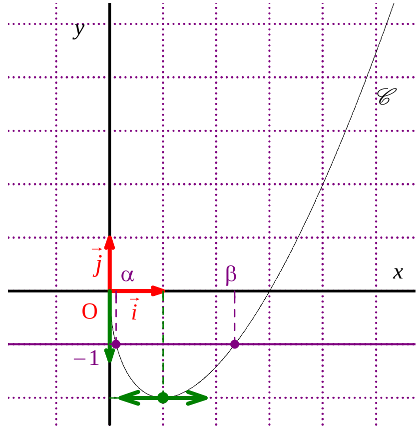
On considère les fonctions $u : x \mapsto x-3$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$.

u est continue sur $\mathbb{R}$ donc par restriction sur $[0\,;+\infty[$.

v est continue sur $[0\,;+\infty[$.

Or $f=uv$ donc f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

Attention, la fonction f n'est pas une fonction polynôme ni une fonction rationnelle.



On pose $\text{I}=[0\,;1]$ et $\text{J}=[2\,;3]$.

On étudie l'équation (E) dans chacun de ces deux intervalles.

• On se place dans l'intervalle I.

(C_1) : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, par restriction, sur I.

(C_2) : La fonction f est strictement décroissante sur I.

(C_3) : On a : $f(0)=0$ et $f(1)=-2$ d'où $-2<-1<0$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution α dans l'intervalle I.

• On se place dans l'intervalle J.

(C_1) : La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc, par restriction, sur J.

(C_2) : La fonction f est strictement croissante sur J.

(C_3) : On a $f(2)=-\sqrt{2}$ et $f(3)=0$ d'où $-\sqrt{2}<-1<0$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation (E) admet une unique solution β dans l'intervalle J.

Conclusion :

D'après le tableau de variations de f, l'équation (E) ne peut admettre d'autres solutions dans $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que l'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{R}_+$.

D'après la calculatrice, on a : $0{,}120<\alpha<0{,}121$ et $2{,}347<\beta<2{,}348$.
On peut par exemple utiliser la méthode de balayage.

Une autre méthode consiste à tracer les représentations graphiques des fonctions $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto -1$ sur l'écran de la calculatrice en prenant une bonne fenêtre graphique (par exemple, $-1 \leqslant X \leqslant 4$ et $-3 \leqslant X \leqslant 1$).
On fait ensuite $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{trace}}$ 5 : intersection.
On peut sélectionner n'importe quelle courbe. C'est la valeur initiale qu'il faut placer avant le point d'intersection dont on cherche l'abscisse.
On obtient les affichages $X = 0.1206148$ pour le premier point et $X = 2.3472964$ pour le deuxième point.

Ainsi, $\alpha = 0{,}120614...$ ou $\beta = 2{,}347296...$.

Avec la touche $\boxed{\text{résol}}$, on obtient seulement l'une des deux solutions mais avec davantage de décimales :

0.12061475842818 et 2.3472963553339.

6°) Déterminer l'abscisse du point B de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 1.
Indication : On sera amené à résoudre une équation et à utiliser le changement d'inconnue $X = \sqrt{x}$.

Cette question a été particulièrement bien réussie.

On résout l'équation $f'(x) = 1$ c'est-à-dire $\dfrac{3x-3}{2\sqrt{x}} = 1$ (1) avec $x > 0$.

On pose $X = \sqrt{x}$.

L'équation (1) s'écrit : $\dfrac{3X^2-3}{2X} = 1$ $(1')$.

$$\begin{aligned}(1') &\Leftrightarrow 3X^2 - 3 = 2X \\ &\Leftrightarrow 3X^2 - 2X - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow X = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \text{ ou } X = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \quad \text{(utilisation du discriminant réduit)}\end{aligned}$$

Or $X = \sqrt{x}$.

On revient alors à l'équation (1) .

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{10}}{3} \text{ ou } \sqrt{x} = \frac{1-\sqrt{10}}{3} \quad \left(\text{impossible car } \frac{1-\sqrt{10}}{3} < 0\right) \\ &\Leftrightarrow x = \left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{11+2\sqrt{10}}{9}\end{aligned}$$

Conclusion : L'abscisse du point B de la courbe $\mathscr{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 1 est $\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}$.

VIII.

On considère une fonction f définie sur un intervalle $I = [a\,;b]$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.
On suppose que f vérifie les conditions C_1, C_2, C_3 suivantes :
C_1 : f est continue sur I ;
C_2 : f est strictement monotone sur I ;
C_3 : $f(a)$ et $f(b)$ soient non nuls et de signes différents.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe un unique réel $x_0 \in [a\,;b]$ tel que $f(x_0) = 0$.
On donne ci-dessous l'algorithme correspondant à la méthode de dichotomie afin de déterminer un encadrement de x_0 d'amplitude inférieure ou égale au réel e strictement positif saisi en entrée.
Les noms des variables reprennent les notations précédentes à l'exception de e.

Entrées :
Saisir a et b
Saisir f
Saisir e

Traitement :
Tantque $b - a > e$ **Faire**
    m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(m) = 0$
        Alors a prend la valeur m
            b prend la valeur m
    FinSi
    Si $f(a) \times f(......) > 0$
        Alors a prend la valeur m
    FinSi
    Si $f(a) \times f(......) < 0$
        Alors b prend la valeur m
    FinSi
FinTantque

Sortie :
Afficher a et b

1°) Compléter cet algorithme.

Entrées :
Saisir a et b
Saisir f
Saisir e

Traitement :
Tantque $b-a>e$ **Faire**
    m prend la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
    Si $f(m)=0$
        Alors a prend la valeur m
        b prend la valeur m
    FinSi
    Si $f(a)\times f(m)>0$
        Alors a prend la valeur m
    FinSi
    Si $f(a)\times f(m)<0$
        Alors b prend la valeur m
    FinSi
FinTantque

Sortie :
Afficher a et b

2°) Écrire l'inégalité vérifiée par les valeurs de a et b affichées en sortie et la valeur de e saisie en entrée.

$b-a\leqslant e$ (une seule inégalité)

La négation de la condition « $b-a>e$ » est « $b-a\leqslant e$ ».

L'inégalité $b-a\leqslant e$ n'est pas vérifiée pour les valeurs précédentes de a et b.

Il s'agit de la première fois où l'on a $b-a\leqslant e$.