TS1 spécialité

Contrôle du mercredi 17 octobre 2018 (1 heure)

Prénom : …………… **Nom : ……………………………………………** **Note : …. / 20**

I. (2 points)

Jeanne réalise des colliers de perles avec le motif suivant : une perle rouge, quatre perles bleues puis trois perles blanches.
Un collier comporte 1789 perles entre les deux fermoirs. Jeanne a commencé par un motif complet.
Quelle est la couleur de la dernière perle ?

…………….. (une seule réponse)

II. (4 points : 2 points pour le calcul + 2 points pour la déduction)

Pour tout entier relatif n, on pose $A = 3n^4 + 5n + 1$ et $B = n^2 + n$.
Calculer l'expression $E = (2n+1)A - (6n^3 - 3n^2 + 3n + 7)B$.
Que peut-on en déduire pour A et B quelle que soit la valeur de n ? Répondre en justifiant avec soin.

……

……

……

……

……

……

……

……

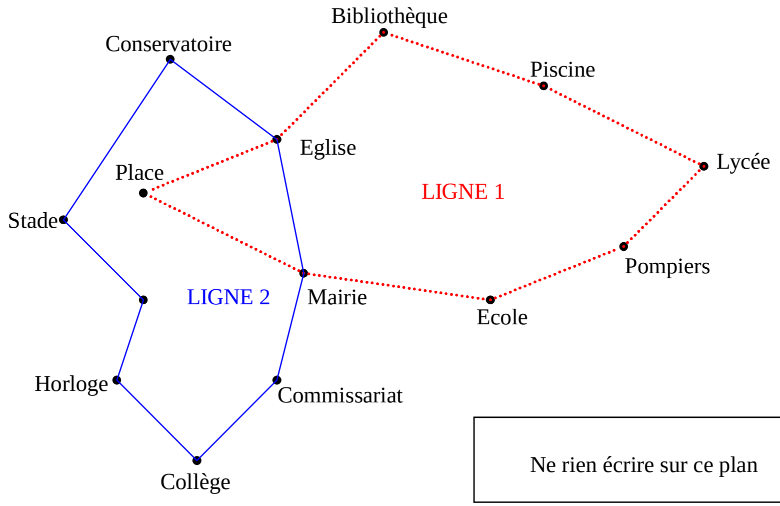
……

……

……

III. (3 points)

Voici le plan de deux lignes de bus :



Ne rien écrire sur ce plan

C'est à 6 h 30 que les deux bus des lignes 1 et 2 partent de l'arrêt « Mairie » dans le sens des aiguilles d'une montre. Le bus de la ligne 1 met 3 minutes entre chaque arrêt (temps de stationnement compris), tandis que le bus de la ligne 2 met 4 minutes. Tous les deux vont effectuer le circuit complet un grand nombre de fois. Ils s'arrêteront juste après 20 h.
Est-ce que les deux bus vont se retrouver à un moment de la journée à l'arrêt « Mairie » en même temps ? Si oui, donner tous les horaires précis de ces rencontres.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

IV. (5 points : 1°) 2 points + 1 point ; 2°) 2 points)

On dispose de n cubes identiques ($n \in \mathbb{N}^*$).
Si on les empile par 10, il en reste 7.
Si on les empile par 7, il y a 22 piles de plus et il en reste 3.

1°) On note q le nombre de piles obtenues en empilant les cubes par 10.
Écrire sans justifier deux égalités liant n et q. En déduire la valeur de n.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

2°) Combien de piles peut-on réaliser si l'on veut que toutes les piles aient le même nombre de cubes sans qu'il reste de cubes ? On donnera toutes les possibilités. Expliquer brièvement.

………

………

………

………

………

V. (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

1°) On considère les égalités suivantes qui sont toutes vraies :

$57 = (-12) \times (-5) - 3 \quad (1) \; ; \; 57 = (-11) \times (-5) + 2 \quad (2) \; ; \; 57 = (-10) \times (-5) + 7 \quad (3).$

Entourer celle qui correspond à la division euclidienne de 57 par – 5.
Compléter la phrase :

Le quotient de la division euclidienne de 57 par – 5 est égal à …… et le reste est égal à …….. .

2°) Quel est le plus petit entier supérieur ou égal à 2018 tel que le reste de la division euclidienne par – 5 soit égal à 0 ?

………….. (une seule réponse)

3°) Quel est le plus grand entier strictement négatif tel que le reste de la division euclidienne par 5 soit égal à 3 ?

………….. (une seule réponse)

VI. (3 points)

Démontrer que pour tout entier relatif n, $n^3 - 1$ est divisible par $n - 1$.
On attend tous les éléments justificatifs.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Corrigé du contrôle du 17-10-2018

I.

Jeanne réalise des colliers de perles avec le motif suivant : une perle rouge, quatre perles bleues puis trois perles blanches.
Un collier comporte 1789 perles entre les deux fermoirs. Jeanne a commencé par un motif complet.
Quelle est la couleur de la dernière perle ?

bleue (une seule réponse)

Chaque motif comporte 8 perles.

On effectue la division euclidienne de 1789 par 8 : $1789 = 223 \times 8 + 5$.

On fait un petit schéma pour se représenter la situation.

II.

Pour tout entier relatif n, on pose $\text{A} = 3n^4 + 5n + 1$ et $\text{B} = n^2 + n$.
Calculer l'expression $\text{E} = (2n+1)\text{A} - (6n^3 - 3n^2 + 3n + 7)\text{B}$.
Que peut-on en déduire pour A et B quelle que soit la valeur de n ? Répondre en justifiant avec soin.

On commence par développer séparément $(2n+1)\text{A}$ et $(6n^3 - 3n^2 + 3n + 7)\text{B}$.

$$\begin{aligned}(2n+1)\text{A} &= (2n+1)(3n^4 + 5n + 1)\\ &= 6n^5 + 3n^4 + 10n^2 + 7n + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6n^3 - 3n^2 + 3n + 7)\text{B} &= (6n^3 - 3n^2 + 3n + 7)(n^2 + n)\\ &= 6n^5 + 3n^4 + 10n^2 + 7n\end{aligned}$$

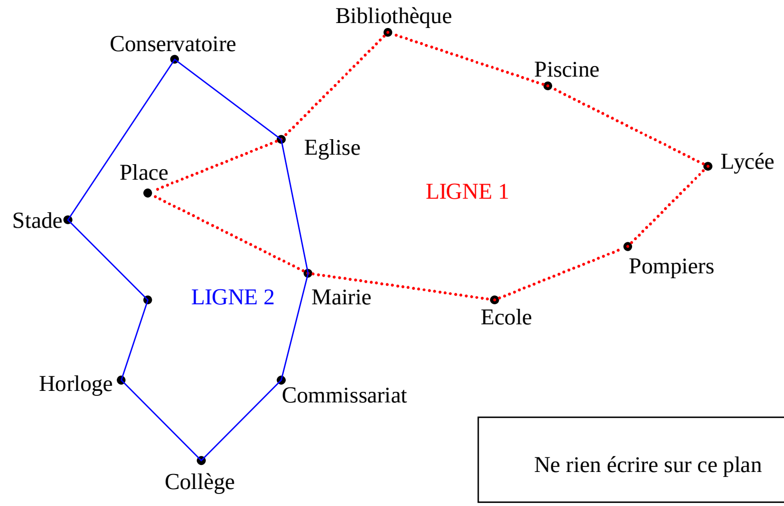
On obtient alors immédiatement $\text{E} = 1$.

E est une combinaison linéaire de A et B dont les coefficients sont des entiers relatifs (le coefficient de A est $2n+1$ qui est un entier relatif et le coefficient de B est $-(6n^3 - 3n^2 + 3n + 7)$ qui est un entier relatif).

Comme cette combinaison linéaire est égale à 1 quel que soit l'entier relatif n, on en déduit par un théorème du cours, que A et B sont premiers entre eux quel que soit l'entier relatif n.

III.

Voici le plan de deux lignes de bus :



Ne rien écrire sur ce plan

C'est à 6 h 30 que les deux bus des lignes 1 et 2 partent de l'arrêt « Mairie » dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le bus de la ligne 1 met 3 minutes entre chaque arrêt (temps de stationnement compris), tandis que le bus de la ligne 2 met 4 minutes. Tous les deux vont effectuer le circuit complet un grand nombre de fois. Ils s'arrêteront juste après 20 h.
Est-ce que les deux bus vont se retrouver à un moment de la journée à l'arrêt « Mairie » en même temps ? Si oui, donner tous les horaires précis de ces rencontres.

Il y a plusieurs stratégies possibles.

On ne sait pas dans quel sens tournent les bus mais cela n'a pas d'incidence sur la résolution de l'exercice.

1ère stratégie : On établit un tableau avec les horaires de passage à l'arrêt « Mairie » pour chacun des deux lignes.

Ligne 1 (24 minutes de circuit)	**Ligne 2 (32 minutes de circuit)**
6 h 30 min	6 h 30 min
6 h 54 min	7 h 02 min
7 h 18 min	7 h 34 min
7 h 42 min	8 h 06 min
8 h 06 min	8 h 38 min
8 h 30 min	9 h 10 min
8 h 54 min	9 h 42 min
9 h 18 min	10 h 14 min
9 h 42 min	10 h 46 min
10 h 06 min	11 h 18 min
10 h 30 min	11 h 50 min
10 h 54 min	12 h 22 min
11 h 18 min	…
…	

2^{e} stratégie :

Le bus de la ligne 1 met $8\times 3=24$ minutes pour repasser à l'arrêt « Mairie ».
Le bus de la ligne 2 met $8\times 4=32$ minutes pour repasser à l'arrêt « Mairie ».
De 6 h 30 à 20 h s'écoulent 13 h 30, soit 810 minutes.

On cherche tous les multiples positifs communs à 24 et à 32 inférieurs ou égal à 810.

On rentre dans la calculatrice les fonctions $x\mapsto 24x$ et $x\mapsto 32x$.
On trouve : 6 h 30 ; 8 h 06; 9 h 42; 11 h 18; 12 h 54; 14 h 30; 16 h 06; 17 h 42; 19 h 18.

3^{e} stratégie :

Nous étudierons plus tard la notion de plus petit commun multiple.

Le plus multiple strictement positif commun à 24 et 32 est 96. Il s'agit du PPCM de 24 et de 32.
Il y a plusieurs moyens pour le déterminer.
On peut par exemple utiliser la calculatrice (commande pour déterminer un PPCM).
On peut également utiliser la décomposition en facteurs premiers de 24 et 32 : on effectue $2^5\times 3=32\times 3=96$.
Or 96 min $=1$ h 36 min.
Les deux bus vont donc se retrouver toutes les 1 h 36 min à l'arrêt « Mairie » en même temps soit à :
6 h 30 ; 8 h 06; 9 h 42; 11 h 18; 12 h 54; 14 h 30; 16 h 06; 17 h 42; 19 h 18.

On utilise la propriété : Les multiples communs à deux entiers non nuls sont les multiples de leur PPCM.

4^{e} stratégie :

On utilise un algorithme puis on le programme sur la calculatrice.

IV.

On dispose de n cubes identiques ($n\in\mathbb{N}^*$).
Si on les empile par 10, il en reste 7.
Si on les empile par 7, il y a 22 piles de plus et il en reste 3.

1°) On note q le nombre de piles obtenues en empilant les cubes par 10.
Écrire sans justifier deux égalités liant n et q. En déduire la valeur de n.

$$n=10q+7$$

$$n=7\left(q+22\right)+3$$

Grâce aux deux égalités, on obtient $10q+7=7\left(q+22\right)+3$ qui donne $3q=150$ d'où $q=50$.

La première égalité donne alors immédiatement $n=507$.

2°) Combien de piles peut-on réaliser si l'on veut que toutes les piles aient le même nombre de cubes sans qu'il reste de cubes ? On donnera toutes les possibilités. Expliquer brièvement.

On cherche les diviseurs positifs de 507.

Les diviseurs positifs de 507 sont 1 ; 3 ; 13 ; 39 ; 169 ; 507.

Le démarrage s'obtient en observant que 507 est divisible par 3 : $507=3\times 169$.

On peut réaliser 1 pile, 3 piles, 13 piles, 39 piles, 169 piles ou 507 piles.

V.

1°) On considère les égalités suivantes qui sont toutes vraies :

$57=\left(-12\right)\times\left(-5\right)-3 \quad (1)$; $57=\left(-11\right)\times\left(-5\right)+2 \quad (2)$; $57=\left(-10\right)\times\left(-5\right)+7 \quad (3)$.

Entourer celle qui correspond à la division euclidienne de 57 par – 5.

$$57=\left(-11\right)\times\left(-5\right)+2$$

On rappelle que dans une division euclidienne le reste est toujours strictement inférieur à la valeur absolue du diviseur.

Compléter la phrase :

Le quotient de la division euclidienne de 57 par – 5 est égal à – 11 et le reste est égal à 2.

2°) Quel est le plus petit entier supérieur ou égal à 2018 tel que le reste de la division euclidienne par – 5 soit égal à 0 ?

2020 (une seule réponse)

Un entier dont le reste de la division euclidienne par – 5 est égal à 0 est un entier multiple de – 5 donc de 5.
Le plus petit multiple de 5 supérieur ou égal à 2018 est 2020.

3°) Quel est le plus grand entier strictement négatif tel que le reste de la division euclidienne par 5 soit égal à 3 ?

– 2 (une seule réponse)

On cherche le plus grand entier strictement négatif de la forme $5k+3$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
On doit avoir $5k+3<0$ soit $k<-\dfrac{3}{5}$ ou encore $k<-0,6$.
La plus grande valeur de k qui convient est – 1 qui donne – 2.

L'égalité de la division euclidienne de – 2 par 5 s'écrit $-2=5\times\left(-1\right)+3$ avec la condition $3<5$.

VI.

Démontrer que pour tout entier relatif n, n^3-1 est divisible par $n-1$.
On attend tous les éléments justificatifs.

$\forall n\in\mathbb{Z} \quad n^3-1=\left(n-1\right)\left(n^2+n+1\right) \quad (1)$ (égalité qui s'obtient par formule de factorisation $a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ ou par division euclidienne)

Or $\forall n\in\mathbb{Z} \quad \left(n^2+n+1\right)\in\mathbb{Z}$.

Donc l'égalité (1) prouve que pour tout entier relatif n, n^3-1 est divisible par $n-1$.