TS1

Devoir pour le lundi 12 novembre 2018

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple recto-verso.

Soit a, b, c trois réels quelconques.
L'objectif est de démontrer l'égalité suivante :

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c-1=4\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{-a+b+c}{2}\cos\frac{a-b+c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}\quad (\mathrm{E}).$$

1°) On considère le polynôme $P(x)=x^2+2(\cos a)(\cos b)x+\cos^2 a+\cos^2 b-1$ avec $x\in\mathbb{R}$.

Démontrer que pour tout réel x, on a $P(x)=(x+\cos a\cos b)^2-(\sin a\sin b)^2$.

En déduire une factorisation de $P(x)$ en facteurs du premier degré.

2°) On rappelle les égalités ci-dessous (appelées « formules de transformations de sommes en produits ») valables pour tout couple $(p\,;q)$ de réels.

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\times\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\times\sin\frac{p-q}{2}$$

Établir l'égalité (E).

Corrigé du DM pour le 12-11-2018

Soit a, b, c trois réels quelconques.
L'objectif est de démontrer l'égalité suivante :

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c-1=4\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{-a+b+c}{2}\cos\frac{a-b+c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2} \quad (\mathrm{E}).$$

1°) On considère le polynôme $P(x)=x^2+2(\cos a)(\cos b)x+\cos^2 a+\cos^2 b-1$ avec $x\in\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout réel x, on a $P(x)=(x+\cos a\cos b)^2-(\sin a\sin b)^2$.
En déduire une factorisation de $P(x)$ en facteurs du premier degré.

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=x^2+2(\cos a)(\cos b)x+\cos^2 a+\cos^2 b-1$$

$$=\left[x^2+2(\cos a)(\cos b)x+(\cos a\cos b)^2\right]-(\cos a\cos b)^2+\cos^2 a+\cos^2 b-1$$

$$=(x+\cos a\cos b)^2-(\cos a\cos b)^2+\cos^2 a+\cos^2 b-1$$

$$=(x+\cos a\cos b)^2-\cos^2 a\cos^2 b+\cos^2 a+\cos^2 b-1$$

$$=(x+\cos a\cos b)^2+\cos^2 a\left(1-\cos^2 b\right)-\left(1-\cos^2 b\right)$$

$$=(x+\cos a\cos b)^2+\cos^2 a\sin^2 b-\sin^2 b$$

$$=(x+\cos a\cos b)^2+\left(\cos^2 a-1\right)\sin^2 b$$

$$=(x+\cos a\cos b)^2-\sin^2 a\sin^2 b$$

$$=(x+\cos a\cos b)^2-(\sin a\sin b)^2$$

On passe à la factorisation :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad P(x)=\left[(x+\cos a\cos b)-\sin a\sin b\right]\left[(x+\cos a\cos b)+\sin a\sin b\right]$$

$$=\left(x+\cos(a+b)\right)\left(x+\cos(a-b)\right)$$

2°) On rappelle les égalités ci-dessous (appelées « formules de transformations de sommes en produits ») valables pour tout couple $(p\,;q)$ de réels.

$$\boxed{\begin{aligned}
&\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2}\\
&\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\times\sin\frac{p-q}{2}\\
&\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\times\cos\frac{p-q}{2}\\
&\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\times\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}}$$

Établir l'égalité (E).

On observe tout d'abord que $\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c-1=P(\cos c)$.

Grâce au résultat établi à la fin de la question 1°), on a :

$$\begin{aligned}
P(\cos c)&=\big(\cos c+\cos(a+b)\big)\big(\cos c+\cos(a-b)\big)\\
&=\big(\cos(a+b)+\cos c\big)\big(\cos(a-b)+\cos c\big)
\end{aligned}$$

Grâce à la troisième formule de transformation de somme en produit (somme de deux cosinus), on a :

$$\cos(a+b)+\cos c=2\cos\frac{a+b+c}{2}\times\cos\frac{a+b-c}{2}$$

$$\cos(a-b)+\cos c=2\cos\frac{a-b+c}{2}\times\cos\frac{-a+b-c}{2}$$

Par conséquent, $P(\cos c)=4\cos\dfrac{a+b+c}{2}\times\cos\dfrac{a+b-c}{2}\times\cos\dfrac{a-b+c}{2}\times\cos\dfrac{-a+b+c}{2}$.

L'égalité (E) est ainsi établie.