TS1 spécialité **Devoir pour le jeudi 8 novembre 2018**

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} (n+k)$.

1°) Calculer u_n pour $n \in \{2\,;3\,;4\,;5\}$. Vérifier que, dans chaque cas, u_n est divisible par 2^n.

2°) Le but de cette question est de démontrer que u_n est divisible par 2^n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

On n'utilisera pas de récurrence.

b) Démontrer que $(2n)! = 2^n \times n! \times \prod_{k=1}^{k=n} (2k-1)$.

Indication : Écrire $(2n)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (2n)$.

c) Conclure.

Consigne

La totalité du devoir doit tenir sur une copie simple recto-verso.

Corrigé du devoir pour le 8-11-2018

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} (n+k)$.

1°) Calculer u_n pour $n \in \{2\,;3\,;4\,;5\}$. Vérifier que, dans chaque cas, u_n est divisible par 2^n.

$u_1 = 1+1 = 2$; 2 est divisible par $2^1 = 2$.

$u_2 = (2+1)\times(2+2) = 12$; 12 est divisible par $2^2 = 4$.

$u_3 = (3+1)\times(3+2)\times(3+3) = 120$; 120 est divisible par $2^3 = 8$.

$u_4 = (4+1)\times(4+2)\times(4+3)\times(4+4) = 1680$; 1680 est divisible par $2^4 = 16$.

$u_5 = (5+1)\times(5+2)\times(5+3)\times(5+4)\times(5+5) = 30240$; 30240 est divisible par $2^5 = 32$.

2°) Le but de cette question est de démontrer que u_n est divisible par 2^n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

On n'utilisera pas de récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \prod_{k=1}^{k=n} (n+k)$$

$$= (n+1)(n+2)\times \ldots \times (n+n)$$

$$= \frac{1\times 2\times 3\times \ldots \times n \times (n+1)\times (n+2)\times \ldots \times (n+n)}{1\times 2\times 3\times \ldots \times n}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!}$$

b) Démontrer que $(2n)! = 2^n \times n! \times \prod_{k=1}^{k=n} (2k-1)$.

Indication : Écrire $(2n)! = 1\times 2\times 3\times 4\times \ldots \times (2n)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2n)! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n)$$

$$= 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1) \times 2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n$$

$$= \prod_{k=1}^{k=n} (2k-1) \times \prod_{k=1}^{k=n} (2k)$$

$$= \prod_{k=1}^{k=n} (2k-1) \times 2^n \times n!$$

c) Conclure.

Le résultat de la question précédente donne $u_n = \prod_{k=1}^{k=n} (2k-1) \times 2^n$.

Comme $\prod_{k=1}^{k=n} (2k-1)$ est un entier, on en déduit que u_n est divisible par 2^n.