TS1 spécialité

Contrôle du jeudi 4 octobre 2018 (50 minutes)

Écrire très lisiblement, sans rature et sans utiliser d'abréviations.

Note : …. / 20

Prénom : ………………………………… **Nom : ……………………………………………………**

I. (2 points)

Le but l'exercice est de démontrer que le produit de deux entiers relatifs pairs est divisible par 4.

Soit a et b deux entiers relatifs pairs.
On sait que $a = 2a'$ et que $b = 2b'$ où a' et b' sont des entiers relatifs.
Achever la démonstration en donnant tous les détails possibles.

………

………

………

………

………

………

II. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 4 points)

À la pointe ouest de l'Île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 240 et 250.
Jacques, sportif de haut niveau, a pour habitude de le monter quatre marches par quatre marches. À la fin, il lui reste une marche.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de marches que comporte l'escalier.
On note N le nombre de marches de l'escalier.

1°) Recopier et compléter la phrase : « N est un entier de la forme …………………… avec k entier naturel ».

………

2°) Déterminer les valeurs possibles de N (méthode au choix).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

III. (6 points)

Déterminer tous les entiers relatifs n vérifiant la condition (C) : « $n+2$ divise $2n-29$ ».

Indication : On observera que $2n-29 = 2(n+2)-33$.

Consignes à respecter impérativement :

- Utiliser un raisonnement par équivalences.
- Faire une phrase de conclusion claire.

IV. (2 points)

Pour tout entier relatif n, on pose $A = (n^2 + n + 1)^2 - 1$.

Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que A soit divisible par 260.

………… (une seule réponse, sans égalité)

V. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit n un entier relatif quelconque.

1°) Démontrer à l'aide d'une combinaison linéaire bien choisie que $3n+2$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2°) Démontrer à l'aide d'une combinaison linéaire bien choisie que n^2+2n et $n+1$ sont premiers entre eux.

Corrigé du contrôle du 4-10-2018

I.

Le but l'exercice est de démontrer que le produit de deux entiers relatifs pairs est divisible par 4.

Soit a et b deux entiers relatifs pairs.
On sait que $a = 2a'$ et que $b = 2b'$ où a' et b' sont des entiers relatifs.
Achever la démonstration en donnant tous les détails possibles.

On a $ab = 4a'b'$.
Or comme a' et b' sont des entiers relatifs, $a'b'$ est aussi un entier relatif.
Donc d'après la définition de la divisibilité d'un entier par un autre, on peut affirmer que 4 divise ab.

II.

À la pointe ouest de l'Île de Ré, se situe le grand phare des baleines. L'escalier qui mène au sommet a un nombre de marches compris entre 240 et 250.
Jacques, sportif de haut niveau, a pour habitude de le monter quatre marches par quatre marches. À la fin, il lui reste une marche.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de marches que comporte l'escalier.
On note N le nombre de marches de l'escalier.

1°) Recopier et compléter la phrase : « N est un entier de la forme …………………… avec k entier naturel ».

N est un entier de la forme $4k+1$ avec k entier naturel.

2°) Déterminer les valeurs possibles de N (méthode au choix).

Les valeurs possibles de N sont 241, 245 et 249.

1ère méthode : On prend les valeurs une à une de 240 à 250.

2e méthode : On cherche les entiers naturels k tels que $240 \leqslant 4k+1 \leqslant 250 \quad (1)$.
On obtient immédiatement $59,75 \leqslant k \leqslant 62,25$.
Comme k est un entier naturel, les valeurs possibles de k sont 60, 61, 62.
On obtient alors les valeurs de N correspondantes : 241, 245, 249.

3e méthode : On utilise la fonction $f : x \mapsto 4x+1$ sur la calculatrice.

III.

Déterminer tous les entiers relatifs n vérifiant la condition (C) : « $n+2$ divise $2n-29$ ».

Indication : On observera que $2n-29 = 2(n+2)-33$.

Consignes à respecter impérativement :

- Utiliser un raisonnement par équivalences.
- Faire une phrase de conclusion claire.

L'égalité $2n-29 = 2(n+2)-33$ ne fait intervenir que des entiers relatifs.

On applique le lemme « $a = bc + d$ » avec $a = 2n-29$, $b = n+2$, $c = 2$, $d = -33$.

$(\mathrm{C}) \Leftrightarrow n+2 \mid -33$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n+2=1 \\ \text{ou} \\ n+2=3 \\ \text{ou} \\ n+2=11 \\ \text{ou} \\ n+2=33 \\ \text{ou} \\ n+2=-1 \\ \text{ou} \\ n+2=-3 \\ \text{ou} \\ n+2=-11 \\ \text{ou} \\ n+2=-33 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n=-1 \\ \text{ou} \\ n=1 \\ \text{ou} \\ n=9 \\ \text{ou} \\ n=31 \\ \text{ou} \\ n=-3 \\ \text{ou} \\ n=-35 \\ \text{ou} \\ n=-5 \\ \text{ou} \\ n=-13 \end{array}\right.$$

Les entiers relatifs n vérifiant la condition (C) sont – 1, 31, 1, 9, – 3, – 35, – 5, – 13.

IV.

Pour tout entier relatif n, on pose $\mathrm{A} = \left(n^2+n+1\right)^2 - 1$.

Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que A soit divisible par 260.

25 (une seule réponse, sans égalité)

On utilise la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2-1}{260}$ sur la calculatrice.

V.

Soit n un entier relatif quelconque.

1°) Démontrer à l'aide d'une combinaison linéaire bien choisie que $3n+2$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

On a $2(3n+2)-3(2n+1)=1$.

L'expression $2(3n+2)-3(2n+1)$ est une combinaison linéaire de $3n+2$ et $2n+1$ dont les coefficients 2 et – 3 sont des entiers relatifs.

On peut donc affirmer que $3n+2$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.

2°) Démontrer à l'aide d'une combinaison linéaire bien choisie que n^2+2n et $n+1$ sont premiers entre eux.

On a $-(n^2+2n)+(n+1)^2=1$.

L'expression $-(n^2+2n)+(n+1)^2$ est une combinaison linéaire de n^2+2n et $n+1$ dont les coefficients – 1 et $n+1$ sont des entiers relatifs.

On peut donc affirmer que n^2+2n et $n+1$ sont premiers entre eux.