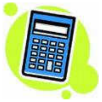
TS1

Contrôle du samedi 29 septembre 2018 (2 heures)



I. (3 points)

Résoudre le système $\begin{cases} z+z'=2 \\ z^3+z'^3=-22 \end{cases}$ d'inconnue $(z\,;z')\in\mathbb{C}^2$.

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

Soit z un nombre complexe.
On considère la proposition conditionnelle P : « Si $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z$, alors z^2 est un imaginaire pur ».

1°) P est-elle vraie ou fausse ? Justifier avec soin.
2°) Écrire la contraposée de P. La contraposée de P est-elle vraie ou fausse ?

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 2°) 2 points)

Pour tout entier naturel n, on considère le polynôme $P_n(z)=z^n(z+1)^{n+1}-z^{n+1}(z+1)^n$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1°) Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a $P_n(z)=(z^2+z)^n$. Quel est le degré de $P_n(z)$?

2°) On pose $j=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{2}$.
Déterminer une expression très simple de $P_n(j)$.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_2(z)=1$.

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont les deux premiers termes sont $u_0=3$ et $u_1=6$ et qui vérifie la relation de récurrence $4u_{n+2}=5u_{n+1}-u_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=4u_{n+1}-u_n$.
Démontrer que (v_n) est une suite constante.
2°) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n=u_{n+1}-u_n$.
Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

3°) Démontrer à l'aide des questions précédentes que pour tout entier naturel n, $u_n=7-\dfrac{1}{4^{n-1}}$.

4°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}u_k$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

V. (4 points)

Partie A (1 point)

On considère la fonction image dont le paramètre n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 définie dans l'encadré ci-dessous.

Fonction image(n)
  u prend la valeur $\dfrac{1}{2}$
  Pour i allant de 1 à n **Faire**
    u prend la valeur $\dfrac{u}{2-u}$
  FinPour
  Renvoyer u
FinFonction

Que renvoie l'instruction image(3) ?

Partie B (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=\dfrac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2-u_n}$ pour tout entier naturel n.

1°) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n. Répondre sans justifier par une seule égalité.

2°) À l'aide de la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{1}{u_n}-1$, démontrer l'expression conjecturée à la question précédente.

Prénom et nom : ……………………………………………..……………

Note : ……../ 20

I. (3 points)

II. (3 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point)

III. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 2°) 2 points)

IV. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 1 point ; 3°) 2 points)

V. (4 points)

Partie A (1 point)

…………………. (une seule réponse sans égalité)

Partie B (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points)

Corrigé du contrôle du 29-9-2018

I.

Résoudre le système $\begin{cases} z+z'=2 \\ z^3+z'^3=-22 \end{cases}$ d'inconnue $(z\,;z')\in\mathbb{C}^2$.

On résout le système par substitution.

Le système est équivalent à $\begin{cases} z'=2-z & (1) \\ z^3+(2-z)^3=-22 & (2) \end{cases}$.

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \cancel{z^3}+8-12z+6z^2\cancel{-z^3}=-22\\ &\Leftrightarrow 6z^2-12z+30=0\\ &\Leftrightarrow z^2-2z+5=0 \quad (2')\end{aligned}$$

Le discriminant réduit de $(2')$ est égal à – 4.
Donc $(2')$ admet deux racines complexes conjuguées distinctes : $1-2\mathrm{i}$ et $1+2\mathrm{i}$.

Pour $z=1-2\mathrm{i}$, (1) donne $z'=1+2\mathrm{i}$.

Pour $z=1+2\mathrm{i}$, (1) donne $z=1-2\mathrm{i}$.

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (E).

$S=\{(1+2\mathrm{i}\,;1-2\mathrm{i})\,;(1-2\mathrm{i}\,;1+2\mathrm{i})\}$

II.

Soit z un nombre complexe.
On considère la proposition conditionnelle P : « Si $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z$, alors z^2 est un imaginaire pur ».

1°) P est-elle vraie ou fausse ? Justifier avec soin.

Soit z un nombre complexe tel que $\operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z$.

On note x la partie réelle de z (qui est aussi égale à sa partie imaginaire).

On a $z=x+\mathrm{i}x$ que l'on peut encore écrire $z=x(1+\mathrm{i})$.

$$\begin{aligned}z^2&=x^2(1+\mathrm{i})^2\\ &=x^2\times 2\mathrm{i}\\ &=2\mathrm{i}x^2\end{aligned}$$

Comme $2x^2\in\mathbb{R}$, on peut affirmer que $z^2\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

2°) Écrire la contraposée de P. La contraposée de P est-elle vraie ou fausse ?

La contraposée s'obtient en écrivant les négations des deux parties de la proposition conditionnelle.
La contraposée de « A $\Rightarrow$ B » est la proposition « non B $\Rightarrow$ non A ».
Lorsque « A $\Rightarrow$ B » est vraie, la contraposée est également vraie.

La contraposée de P est donc la proposition P' : « Si z^2 n'est pas un imaginaire pur, alors $\operatorname{Re} z\neq\operatorname{Im} z$ ».

> Attention, il ne faut pas confondre réciproque et contraposée.
> La *réciproque* de l'implication A $\Rightarrow$ B est l'implication B $\Rightarrow$ A.
> Si l'implication A $\Rightarrow$ B est vraie, l'implication réciproque B $\Rightarrow$ A n'est pas forcément vraie.

III.

Pour tout entier naturel n, on considère le polynôme $P_n(z)=z^n(z+1)^{n+1}-z^{n+1}(z+1)^n$ avec $z\in\mathbb{C}$.

1°) Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a $P_n(z)=(z^2+z)^n$. Quel est le degré de $P_n(z)$?

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad P_n(z)=z^n(z+1)^n\left[(z+1)-z\right]$$

$$P_n(z)=z^n(z+1)^n$$

$$P_n(z)=(z^2+z)^n$$

2°) On pose $j=\dfrac{\mathrm{i}\sqrt{3}-1}{2}$.
Déterminer une expression très simple de $P_n(j)$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad P_n(j)=(j^2+j)^n$ (utilisation de la question précédente)

On calcule séparément j^2+j.

On obtient $j^2+j=-1$ par un calcul simple vérifiable à la machine.

3°) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_2(z)=1$.

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_2(z)=1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \left(z^2+z\right)^2=1$

$\Leftrightarrow z^2+z=1$ ou $z^2+z=-1$

$\Leftrightarrow z^2+z-1=0$ (a) ou $z^2+z+1=0$ (b)

Les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation (a) sont $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation (b) sont $\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Soit S l'ensemble des solutions de l'équation (1).

$$S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}$$

IV.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont les deux premiers termes sont $u_0=3$ et $u_1=6$ et qui vérifie la relation de récurrence $4u_{n+2}=5u_{n+1}-u_n$ pour tout entier naturel n.

1°) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=4u_{n+1}-u_n$.
Démontrer que (v_n) est une suite constante.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_{n+1}=4u_{n+2}-u_{n+1}$

$=4\times\dfrac{5u_{n+1}-u_n}{4}-u_{n+1}$

$=5u_{n+1}-u_n-u_{n+1}$

$=4u_{n+1}-u_n$

$=v_n$

On a ainsi démontré que (v_n) est une suite constante.

Comme $v_0=21$, $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=21$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n=u_{n+1}-u_n$.
Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad w_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}$

$=\dfrac{5u_{n+1}-u_n}{4}-u_{n+1}$

$=\dfrac{u_{n+1}-u_n}{4}$

$=\dfrac{w_n}{4}$

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

Comme $w_0=3$, $\forall n\in\mathbb{N} \quad w_n=3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

3°) Démontrer à l'aide des questions précédentes que pour tout entier naturel n, $u_n=7-\dfrac{1}{4^{n-1}}$.

On utilise les expressions $v_n=4u_{n+1}-u_n$ et $w_n=u_{n+1}-u_n$.

On considère l'expression v_n-4w_n qui permet d'éliminer u_{n+1}.

$\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n-4w_n=\left(4u_{n+1}-u_n\right)-4\left(u_{n+1}-u_n\right)$

$=3u_n$

On utilise ensuite les expressions de v_n et w_n obtenues grâce aux résultats des questions 1°) et 2°) à savoir $v_n=21$ et $w_n=3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

On obtient $\forall n\in\mathbb{N} \quad 3u_n=21-4\times3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ soit $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=7-4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ qui donne $u_n=7-\dfrac{1}{4^{n-1}}$.

4°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}u_k$.

Déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n.

On utilise l'expression explicite de u_n obtenue à la question précédente.

On l'écrit sous la forme $u_n=7-4\times\dfrac{1}{4^n}=7-4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ (dernière écriture permettant d'appliquer plus facilement les formules).

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{k=n} 7 - 4 \times \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$= 7(n+1) - 4 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= 7(n+1) - \frac{16}{3} \times \left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$= 7n + \frac{5}{3} + \frac{16}{3 \times 4^{n+1}}$$

$$= 7n + \frac{5}{3} + \frac{4}{3 \times 4^{n}}$$

$$= 7n + \frac{5}{3} + \frac{1}{3 \times 4^{n-1}}$$

V.

Partie A

On considère la fonction image dont le paramètre *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 1 définie dans l'encadré ci-dessous.

```
Fonction image(n)
    u prend la valeur 1/2
    Pour i allant de 1 à n Faire
        u prend la valeur u/(2-u)
    FinPour
    Renvoyer u
FinFonction
```

Que renvoie l'instruction $\text{image}(3)$?

$\text{image}(3)$ renvoie la valeur $\frac{1}{9}$.

On peut schématiser $\frac{1}{2} \to \frac{1}{3} \to \frac{1}{5} \to \frac{1}{9}$.

On peut aussi remplir un tableau d'évolution des variables.

i		1	2	3
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{9}$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$ pour tout entier naturel *n*.

1°) Conjecturer l'expression de u_n en fonction de *n*. Répondre sans justifier par une seule égalité.

On calcule les premiers termes de la suite.

$u_0 = \frac{1}{2}$; $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{1}{5}$; $u_3 = \frac{1}{9}$; $u_4 = \frac{1}{17}$; $u_5 = \frac{1}{33}$

D'après ces résultats, on peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2^n + 1}$.

2°) À l'aide de la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$, démontrer l'expression conjecturée à la question précédente.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$$

$$= \frac{2-u_n}{u_n} - 1$$

$$= \frac{2}{u_n} - 2$$

$$= 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$$

$$= 2v_n$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 2.

On calcule son premier terme $v_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = 2^n$.

D'après l'égalité définissant la suite (v_n), on peut dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{u_n} - 1 = 2^n$ d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{u_n} = 2^n + 1$.

Finalement, on obtient $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2^n + 1}$ qui est bien la conjecture émise à la question précédente.