**TS1**

# Contrôle du vendredi 21 septembre 2018 (50 minutes)

**Prénom et nom :** ……………………………………………..……………

**Note : …….. / 20**

Il est demandé que tous les traits de fractions soient faits à la règle.

## I. (2 points)

On pose $z = 3 - \dfrac{5\text{i}}{1+2\text{i}}$ et $z' = 3\text{i} - 1 - \text{i}(\text{i}-1)^3$. Que peut-on dire des nombres $z$ et $z'$ ? Justifier.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

## II. (2 points)

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes tels que $z = \text{i}\overline{z'}$. Exprimer $z'$ en fonction de $z$.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

## III. (4 points)

Soit $n$ un entier relatif quelconque. On pose $z = (1+\text{i})^{n+1}(1-\text{i})^{n-1}$.

Démontrer que $z$ est un imaginaire pur. On présentera les calculs justificatifs avant de rédiger une phrase de conclusion.

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

## IV. (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\overline{z}+1\right)^2 = -1 \quad (\text{E})$. On rédigera selon le modèle donné ci-dessous.

$(\text{E}) \Leftrightarrow$ …………………

$\vdots$

$\Leftrightarrow z =$ ……..

Soit $S$ l'ensemble des solutions de $(\text{E})$.

$S =$ ………………….

Ne rien écrire dans le cadre.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

---

**V. (8 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) a) 2 points ; b) 2 points)**

On considère la suite complexe $(z_n)$ définie par son premier terme $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et la relation de récurrence $z_{n+1} = \dfrac{\mathrm{i}}{\overline{z_n}}$.

1°) Exprimer $z_{n+2}$ en fonction de $z_n$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°) On choisit $z_0 = 2\mathrm{i} - 1$. Préciser la valeur de $z_{2018}$. Expliquer brièvement sur les lignes en dessous de l'égalité.

……………………… (une seule égalité sans justifier)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) Dans cette question, on suppose que $z_0 = a + \mathrm{i}b$ où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$.

a) Exprimer $z_1$ sous forme algébrique en fonction de $a$ et $b$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

b) Dans le plan complexe *P* muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on note A et B les points d'affixes respectives $z_0$ et $z_1$.
Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ en fonction de $a$ et $b$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

# Corrigé du contrôle du 21-9-2018

## I.

On pose $z=3-\frac{5\text{i}}{1+2\text{i}}$ et $z'=3\text{i}-1-\text{i}\left(\text{i}-1\right)^3$. Que peut-on dire des nombres $z$ et $z'$ ? Justifier.

$z=3-\frac{5\text{i}}{1+2\text{i}}$

$=3-\frac{5\text{i}\times\left(1-2\text{i}\right)}{\left(1+2\text{i}\right)\times\left(1-2\text{i}\right)}$

$=3-\frac{\cancel{5}\text{i}\times\left(1-2\text{i}\right)}{\cancel{5}}$

$=3-\text{i}\times\left(1-2\text{i}\right)$

$=3-\text{i}-2$

$=1-\text{i}$

$z'=3\text{i}-1-\text{i}\left(\text{i}-1\right)^3$

$=3\text{i}-1-\text{i}\left(2+2\text{i}\right)$ (on écrit $\left(\text{i}-1\right)^3=\left(\text{i}-1\right)\times\left(\text{i}-1\right)^2=\left(\text{i}-1\right)\times\left(-2\text{i}\right)=2+2\text{i}$ ou bien on utilise l'identité remarquable cubique $\left(a-b\right)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$)

$=3\text{i}-1-2\text{i}+2$

$=1+\text{i}$

On constate que les nombres $z$ et $z'$ sont conjugués.

On vérifie les calculs à l'aide de la calculatrice.

## II.

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes tels que $z=\text{i}\overline{z'}$. Exprimer $z'$ en fonction de $z$.

L'égalité $z=\text{i}\overline{z'}$ donne successivement :

$\overline{z'}=\frac{z}{\text{i}}$

$\overline{z'}=\frac{\text{i}\times z}{\text{i}\times\text{i}}$

$\overline{z'}=\frac{\text{i}z}{-1}$

$\overline{z'}=-\text{i}z$

$\overline{\overline{z'}}=-\overline{\text{i}z}$

$z'=-\overline{\text{i}z}$

$z'=-\overline{\text{i}}\times\overline{z}$

$z'=-\left(-\text{i}\right)\times\overline{z}$

$z'=\text{i}\overline{z}$

## III.

Soit $n$ un entier relatif quelconque. On pose $z=\left(1+\text{i}\right)^{n+1}\left(1-\text{i}\right)^{n-1}$.
Démontrer que $z$ est un imaginaire pur. On présentera les calculs justificatifs avant de rédiger une phrase de conclusion.

Il faut démontrer que $z$ est de la forme i$b$ où $b$ est un réel.

$z=\left(1+\text{i}\right)^n\times\left(1+\text{i}\right)\times\left(1-\text{i}\right)^n\times\left(1-\text{i}\right)^{-1}$

$=\left(1+\text{i}\right)^n\times\left(1-\text{i}\right)^n\times\left(1+\text{i}\right)\times\frac{1}{1-\text{i}}$

$=\left[\left(1+\text{i}\right)\times\left(1-\text{i}\right)\right]^n\times\frac{1+\text{i}}{1-\text{i}}$

$=2^n\times\frac{\left(1+\text{i}\right)^2}{1+1}$

$=2^n\times\frac{2\text{i}}{2}$

$=2^n\text{i}$

Comme $n\in\mathbb{Z}$, $2^n\in\mathbb{R}$. Donc $z$ est un imaginaire pur.

**IV.**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\overline{z}+1\right)^2=-1$ $\quad(\text{E})$. On rédigera selon le modèle donné ci-dessous.

$(\text{E}) \Leftrightarrow$ ......................

$\vdots$

$\Leftrightarrow z=$........

Soit $S$ l'ensemble des solutions de $(\text{E})$.

$S=$.....................

Ne rien écrire dans le cadre.

$$(\text{E}) \Leftrightarrow \left(\overline{z}+1\right)^2=\text{i}^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{z}+1=\text{i} \text{ ou } \overline{z}+1=-\text{i}$$
$$\Leftrightarrow \overline{z}=\text{i}-1 \text{ ou } \overline{z}=-1-\text{i}$$
$$\Leftrightarrow z=-\text{i}-1 \text{ ou } z=-1+\text{i}$$

Soit $S$ l'ensemble des solutions de $(\text{E})$.

$S=\left\{-1-\text{i}\,;-1+\text{i}\right\}$

---

**V.**

On considère la suite complexe $\left(z_n\right)$ définie par son premier terme $z_0\in\mathbb{C}^*$ et la relation de récurrence $z_{n+1}=\dfrac{\text{i}}{\overline{z_n}}$.

1°) Exprimer $z_{n+2}$ en fonction de $z_n$.

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad z_{n+2}=\frac{\text{i}}{\overline{z_{n+1}}}$$
$$=\frac{\text{i}}{\overline{\left(\dfrac{\text{i}}{\overline{z_n}}\right)}}$$
$$=\frac{\text{i}}{-\dfrac{\text{i}}{z_n}}$$
$$=\cancel{\text{i}}\times\left(-\frac{z_n}{\cancel{\text{i}}}\right)$$
$$=-z_n$$

2°) On choisit $z_0=2\text{i}-1$. Préciser la valeur de $z_{2018}$. Expliquer brièvement sur les lignes en dessous de l'égalité.

$1-2\text{i}$ (une seule égalité sans justifier)

D'après la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N} \quad z_{n+4}=-z_{n+2}=z_n$.
Ainsi la suite $\left(z_n\right)$ est périodique de période 4.
On en déduit que $z_0=z_4=z_8=...=z_{2016}$ (puisque 2016 est un multiple de 4).
Or $z_{2018}=-z_{2016}$. Donc $z_{2018}=-z_0=1-2\text{i}$.

3°) Dans cette question, on suppose que $z_0=a+\text{i}b$ où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a^2+b^2=1$.

a) Exprimer $z_1$ sous forme algébrique en fonction de $a$ et $b$.

$$z_1=\frac{\text{i}}{\overline{z_0}}$$
$$=\frac{\text{i}}{a-\text{i}b}$$
$$=\frac{\text{i}\left(a+\text{i}b\right)}{a^2+b^2}$$
$$=\frac{\text{i}a-b}{1}$$
$$=\text{i}a-b$$

b) Dans le plan complexe $P$ muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\vec{u},\vec{v}\right)$, on note A et B les points d'affixes respectives $z_0$ et $z_1$.
Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ en fonction de $a$ et $b$.

$$z_{\overrightarrow{\text{AB}}}=z_{\text{B}}-z_{\text{A}}$$
$$=-b+\text{i}a-a-\text{i}b$$
$$=-a-b+\text{i}\left(a-b\right)$$